

Distributions de temps de réaction : une approche idiothétique

Philippe Golay, Université de Genève

*Recherche soutenue par le Fond national suisse de la recherche scientifique
(requête no 100011-107764, requérante principale : Anik de Ribaupierre)*

3^e ATELIER MODEVAIIA (MODELisation de la Variabilité Intra et Interindividuelle) - Markstein (Vosges), 28-30 juin 2011

Constat de départ

- La modélisation des distributions de temps de réaction est un problème difficile
- Les distributions ne sont pas normales
 - Souvent vrai, pas toujours
- Alors elles sont ex-gaussiennes/gamma/<...> !
 - Ah oui ? Rarement convenablement testé !!

Méthode de résolution de problème selon A. Connes

1) Lorsque l'on rencontre un problème difficile, il faut commencer par le généraliser

2) essayer ensuite de résoudre le problème pour un cas simple

3) essayer de transplanter, sans faire mourir, les idées du cas simple au cas complexe



Acte I

1) Généralisation

Châteaux de sables et temps de réaction

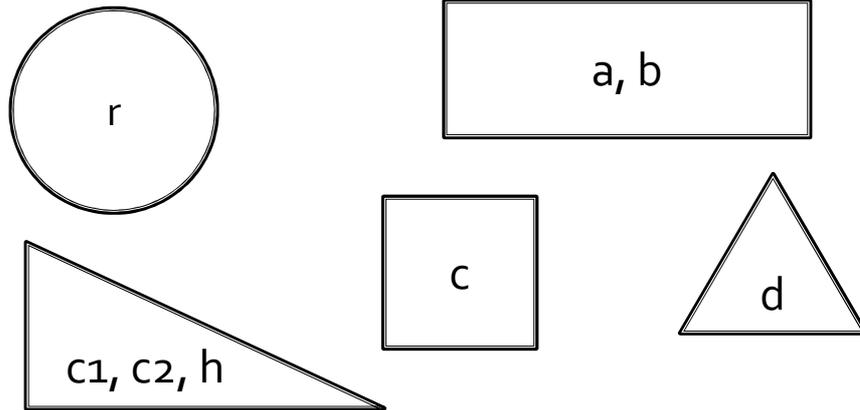
- 2 jumeaux appartiennent à 2 tribus différentes:
 - La tribu des temps de réaction, qu'il est inutile de présenter ici
 - La tribu des châteaux de sable (qui n'est pas soutenue par le Fond national suisse de la recherche scientifique!)

Etude des châteaux de sable : matériel et méthode



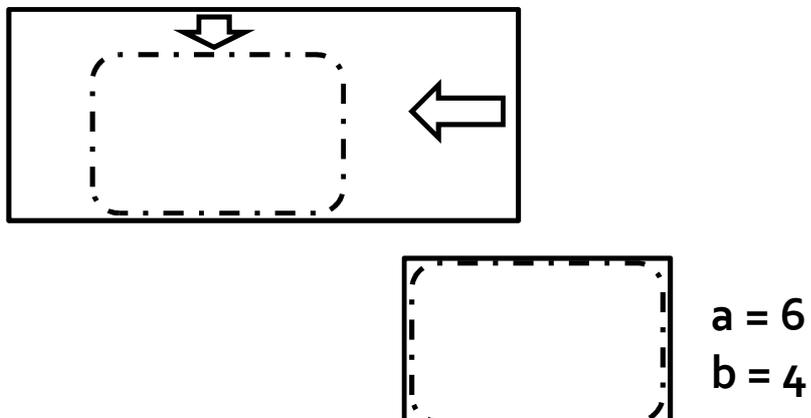
Modélisation (1/3)

- 1) Choix d'un modèle



Modélisation (2/3)

- 2) Ajustement des paramètres

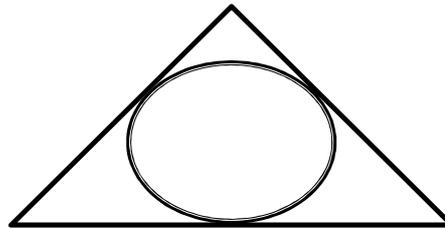


Modélisation (3/3)

- 3) Degré d'ajustement du modèle



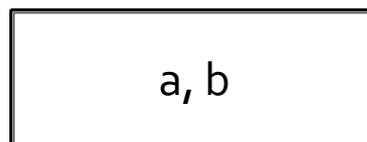
« GOOD FIT ! »



« BAD FIT ! »

Quelques résultats (1/3)

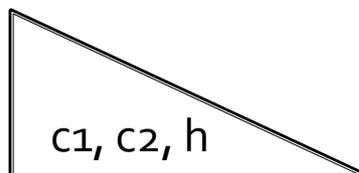
- Modèle rectangle



- Corrélation positive entre a et b !
 - Pas directement lié au choix du modèle car a et b sont mathématiquement indépendants
 - « la valeur de a est grande mais c'est à cause de b » ??

Quelques résultats (2/3)

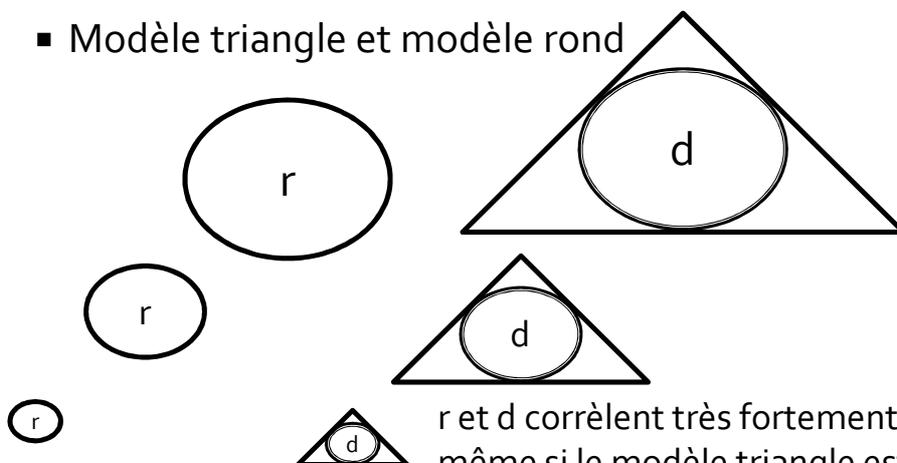
- Modèle triangle rectangle



- Corrélations positives entre les paramètres
 - Relations mathématique entre les paramètres (Pythagore, de Ribaupierre, Lecerf & Kop, 2011)!

Quelques résultats (3/3)

- Modèle triangle et modèle rond



r et d corrèlent très fortement, même si le modèle triangle est très mal ajusté aux données !

Problème

- Dilemme pour certaines séries de châteaux :
- Le même modèle pour tous
 - Pas toujours bien ajusté pour tous les châteaux
 - Paramètres comparables !
- Différents modèles
 - Beaucoup mieux ajusté !
 - Paramètres différents, difficiles à comparer

Petit retour aux TR

- *Il existe aussi de nombreux modèles :*
 - *Bernoulli Beta Binomial Burr Cauchy Chi-Squared Dagum Discrete Uniform Erlang Error Error Function Exponential F Fatigue Life Frechet Gamma Generalized Extreme Value Generalized Gamma Generalized Logistic Generalized Pareto Geometric Gumbel Max Gumbel Min Hyperbolic Secant Hypergeometric Inverse Gaussian Johnson SB Johnson SU Kumaraswamy Laplace Levy Logarithmic Logistic Log-Gamma Log-Logistic Log-Pearson 3 (LP3) Lognormal Negative Binomial Nakagami Normal Pareto Pareto 2 (Lomax) Pearson 5 Pearson 6 Pert Poisson Phased Bi-Exponential Phased Bi-Weibull Power Function Rayleigh Reciprocal Rice Student's t Triangular Uniform Wakeby Weibull...*

Petit retour aux TR

Il existe aussi
beaucoup de
paramètres
différents !

#	Distribution	Paramètres
1	Beta	$\alpha_1=0.74335941$ $\alpha_2=3.4789234$ $a=226$ $b=1482.0$
2	Burr	$k=0.06708929$ $\alpha=28.40642$ $\beta=239.10344$
3	Burr (4P)	$k=0.26263547$ $\alpha=0.83222135$ $\beta=1.2938699$ $\gamma=226.0$
4	Cauchy	$\sigma=92.686668$ $\mu=339.24864$
5	Chi-Squared	$\nu=442$
6	Chi-Squared (2P)	$\nu=22371$ $\gamma=-21929.556$
7	Dagum	$k=353.00959$ $\alpha=2.5437639$ $\beta=26.297661$
8	Dagum (4P)	$k=3.2090821$ $\alpha=0.30781059$ $\beta=0.35864014$ $\gamma=226.0$
9	Erlang	$m=4$ $\beta=104.33439$
10	Erlang (3P)	$m=1$ $\beta=216.23531$ $\gamma=226.0$
11	Error	$k=1.0$ $\sigma=214.80305$ $\mu=442.23529$
12	Error Function	$h=0.00329188$
13	Exponential	$\lambda=0.00226124$
14	Exponential (2P)	$\lambda=0.00462459$ $\gamma=226$
15	Fatigue Life	$\alpha=0.42370961$ $\beta=405.99913$
16	Fatigue Life (3P)	$\alpha=1.0292761$ $\beta=153.08654$ $\gamma=206.98795$
17	Frechet	$\alpha=2.9913048$ $\beta=330.03937$
18	Frechet (3P)	$\alpha=1.8282812$ $\beta=177.55592$ $\gamma=142.42293$
19	Gamma	$\alpha=4.2386339$ $\beta=104.33439$
20	Gamma (3P)	$\alpha=0.9078941$ $\beta=228.11008$ $\gamma=226.0$
21	Gen. Extreme Value	$k=0.22261257$ $\sigma=122.84723$ $\mu=337.0407$

Petit retour aux TR

- Même problème !
 - De nombreux modèles, de nombreux paramètres
 - Un modèle n'est pas le meilleur pour tous les participants
 - On ne peut pas directement comparer les paramètres issus de modèles différents

Petit retour aux TR

- Même problème !
 - Certains paramètres n'ont peut-être même pas les propriétés métriques que l'ont veut leur prêter:
 - Corrélation nulle pour certains paramètres estimés sur deux tâches quasi identiques (ex. param « shape » distribution Weibull)
 - Certains paramètres évoluent, tout au plus, dans une métrique ordinale (ex : paramètre d'une fonction exponentielle ou degré d'asymétrie)
 - Corrélations, ANOVA ??

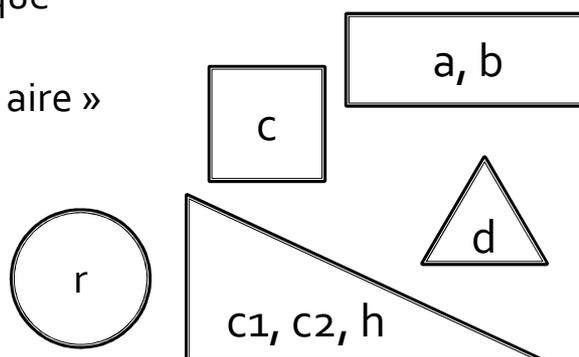
Acte II

2) Résolution du problème pour un cas simple

La fonction « aire »

- Il est possible de faire passer tous ces paramètres et modèles dans une seule et même métrique

- Fonction « aire »

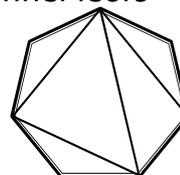


La fonction « aire »

- Carré : c^2
- Cercle : $\pi * r^2$
- Rectangle : $a * b$
- Triangle équilatéral : $(d^2 * \sqrt{3}) / 4$
- Triangle rectangle : $(c1 * c2) / 2$
- Triangle quelconque : $(base * hauteur) / 2$

- Il est possible de découper n'importe quel polygone en plusieurs triangles et ensuite d'additionner leurs aires

- Solution très générale !

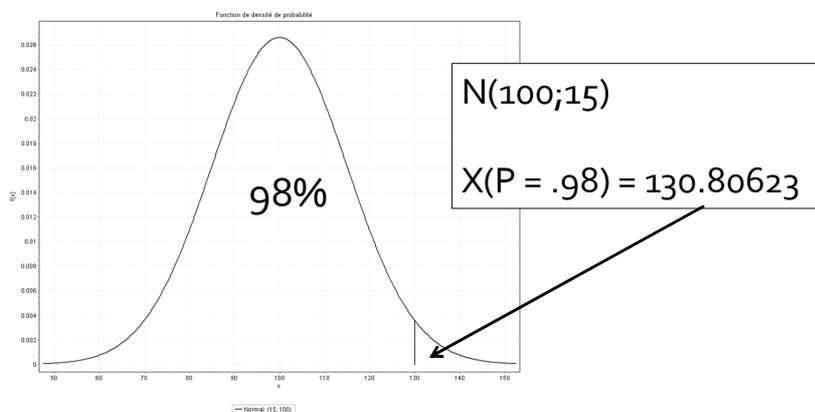


Acte III

3) Transposition du cas simple au cas complexe

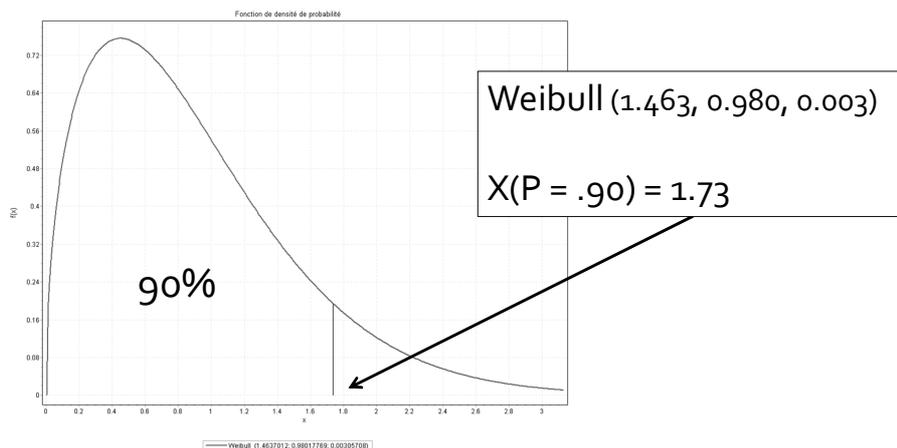
La fonction « aire » existe aussi pour les distributions !

- Fonction de répartition/répartition inverse



La fonction « aire » existe aussi pour les distributions !

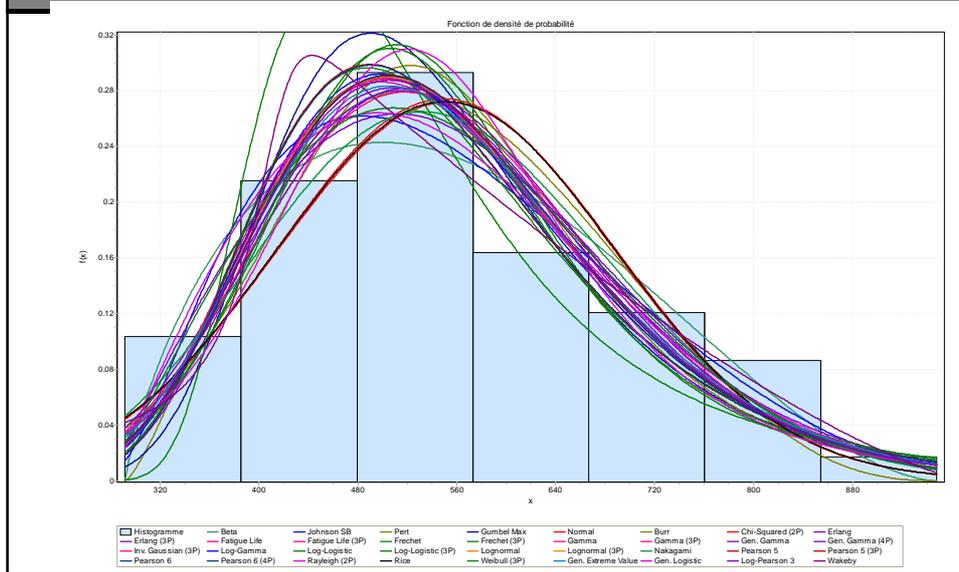
- Fonction de répartition/répartition inverse



Marche à suivre

- 1) Pour chaque participant on ajuste une cinquantaine de distributions
- 2) On sélectionne la meilleure, en fonction d'un test d'ajustement (ici Anderson-Darling)
- On extrait un paramètre de performance défini comme le temps de réaction médian ($P = .50$) et un paramètre de variabilité défini comme le temps de réaction supérieur à 95% de la distribution ($P = .95$)
- On calcule encore la différence entre $P = .95$ et $P = .50$ pour réduire l'influence du temps moyen

Méthode (1/3)



Méthode (2/3)

Qualité d'ajustement - Synthèse

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Khi-Carré	
		Statistique	Rang	Statistique	Rang	Statistique	Rang
31	Johnson SB	0.05087	17	0.20793	1	3.7155	3
62	Wakeby	0.0475	12	0.22565	2	8.1063	37
64	Weibull (3P)	0.05747	21	0.26499	3	3.8585	7
56	Rayleigh (2P)	0.04564	5	0.27106	4	3.784	5
20	Gamma (3P)	0.04436	2	0.27462	5	3.8398	6
21	Gen. Extreme Value	0.04968	15	0.27831	6	4.0638	10
23	Gen. Gamma (4P)	0.06034	24	0.27886	7	3.8827	8
16	Fatigue Life (3P)	0.04467	3	0.29589	8	4.3346	15
36	Log-Gamma	0.04364	1	0.30171	9	3.2981	2
15	Fatigue Life	0.04681	7	0.30275	10	5.4418	23
39	Log-Pearson 3	0.04943	14	0.31161	11	5.4146	21
42	Lognormal (3P)	0.04608	6	0.31388	12	4.3101	14
18	Frechet (3P)	0.04469	4	0.31428	13	4.1295	11
41	Lognormal	0.04683	8	0.31641	14	5.0546	17

Méthode (3/3)

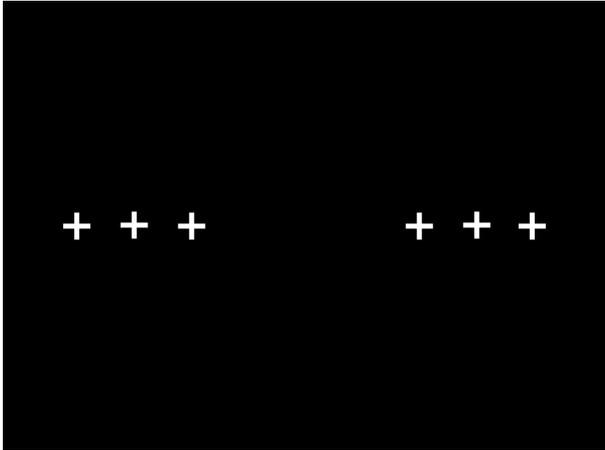
Qualité d'ajustement - Détails [masquer]

Wakeby [#62]					
Kolmogorov-Smirnov					
Taille de l'échantillon	116				
Statistique	0.0475				
Valeur de P	0.94481				
Rang	12				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valeur critique	0.09963	0.11355	0.12609	0.14094	0.15125
Rejeter?	Non	Non	Non	Non	Non
Anderson-Darling					
Taille de l'échantillon	116				
Statistique	0.22565				
Rang	2				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valeur critique	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rejeter?	Non	Non	Non	Non	Non
Khi-Carré					
Degrés de liberté	6				
Statistique	8.1063				
Valeur de P	0.23042				
Rang	37				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valeur critique	8.5581	10.645	12.592	15.033	16.812
Rejeter?	Non	Non	Non	Non	Non

Quelques résultats

- Adultes Agés (N = 122)
- 2 Tâches de temps de réaction à choix
 - Croix-Carré
 - Lignes

Croix-Carré



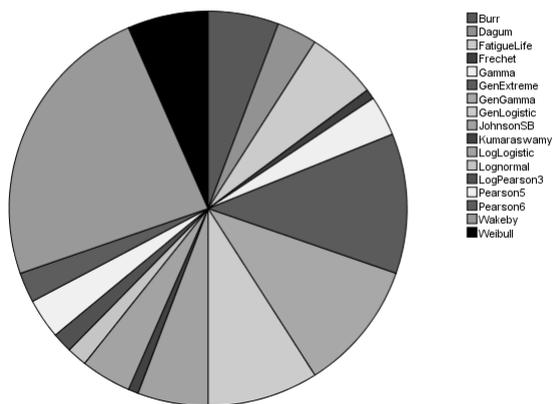
+ + + + + +

Lignes



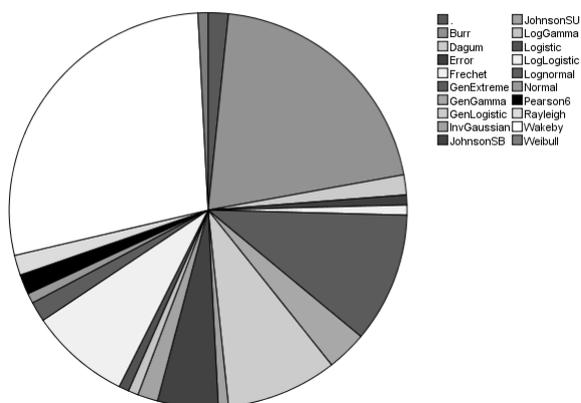
Croix-Carré

CroixCarre

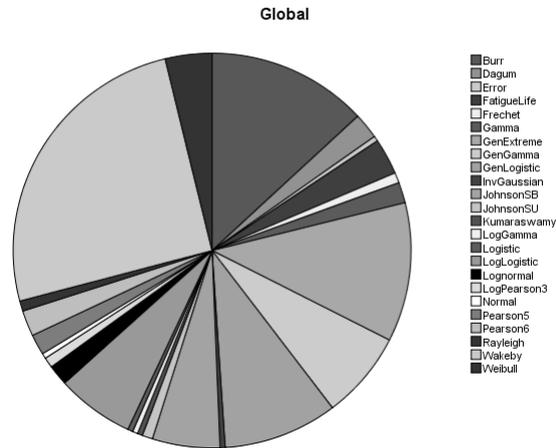


Lignes

Lignes



Global



Global

Global					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Burr	31	13.1	13.1	13.1
	Dagum	5	2.1	2.1	15.2
	Error	1	.4	.4	15.6
	FatigueLife	7	3.0	3.0	18.6
	Frechet	2	.8	.8	19.4
	Gamma	4	1.7	1.7	21.1
	GenExtreme	27	11.4	11.4	32.5
	GenGamma	17	7.2	7.2	39.7
	GenLogistic	22	9.3	9.3	48.9
	InvGaussian	1	.4	.4	49.4
	JohnsonSB	13	5.5	5.5	54.9
	JohnsonSU	2	.8	.8	55.7
	Kumaraswamy	1	.4	.4	56.1
	LogGamma	1	.4	.4	56.5
	Logistic	1	.4	.4	57.0
	LogLogistic	15	6.3	6.3	63.3
	Lognormal	4	1.7	1.7	65.0
	LogPearson3	2	.8	.8	65.8
	Normal	1	.4	.4	66.2
	Pearson5	4	1.7	1.7	67.9
	Pearson6	5	2.1	2.1	70.0
	Rayleigh	2	.8	.8	70.9
	Wakeby	60	25.3	25.3	96.2
	Weibull	9	3.8	3.8	100.0
	Total	237	100.0	100.0	

• Une seule distribution normale

• Distribution gamma rarement la meilleure

• Distribution Weibull rarement la meilleure

• Wakeby = globalement la meilleure (assez logique car 5 paramètres)

Validité convergente (Croix-Carré x Lignes)

- Moy x Moy : R = .762
- SD x SD : R = .559

- P50 x P50 : R = .675
- P90 x P90 : R = .725
- P95 x P95 : R = .691
- P99 x P99 : R = .506

- D90-50 x D90-50 : R = .589
- D95-50 x D95-50 : R = .539
- D99-50 x D99-50 : R = .369

Perf x Variabilité (CC/Lignes)

- Moy x SD : R = .683 / .722

- P50 x P90 : R = .920 / .916

- P50 x P95 : R = .871 / .846

- P50 x D90-50 : R = .460 / .634

- P50 x D95-50 : R = .450 / .574

Récapitulatif

- Généralisation du problème
 - Plusieurs modèles, divers paramètres
- Solution pour un cas simple
 - Fonction aire
- Transposition au cas complexe
 - Fonction de répartition inverse
- Avantage :
 - données extrêmes prises en compte mais peu de poids car rares
 - Contrôle de l'influence du temps moyen

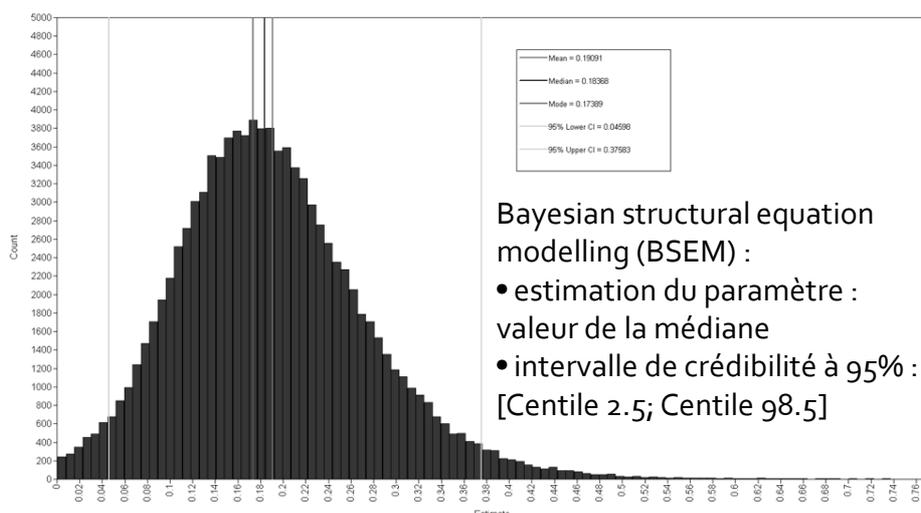
Questions

- Assez proche d'un centilage, qui lui ne fait pas d'hypothèse sur la distribution des données
 - le logiciel statistique va toutefois procéder à des interpolations pour estimer les valeurs - négligeable ?
 - Beaucoup plus simple et l'esprit reste le même !
- Définition probabiliste de la performance/variabilité :
 - Performance = temps de réaction le plus probable/fréquent
 - Variabilité = valeur du temps de réaction supérieur à une certaine proportion des autres temps de réaction

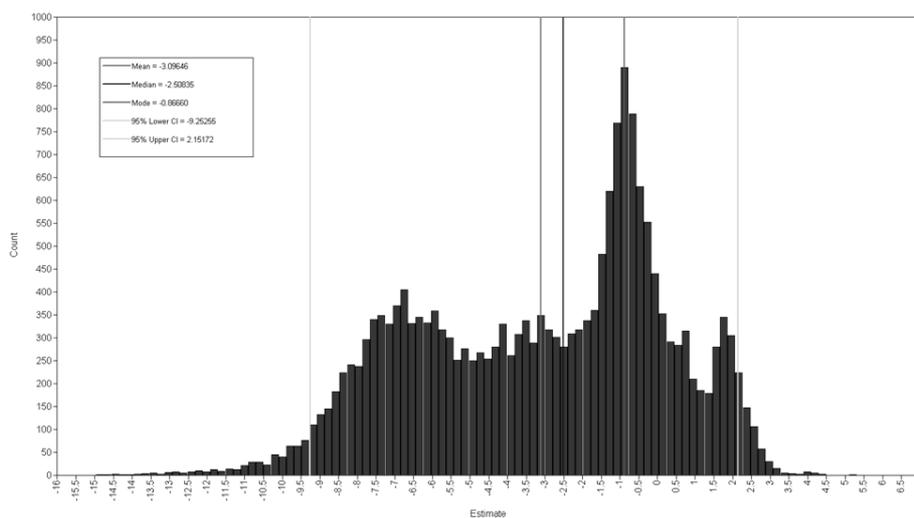
Analogie avec approche bayésienne

- Maximum Likelihood
 - Basée sur la normalité asymptotique des estimations des paramètres
 - Nécessité d'un large échantillon pour estimation correcte des paramètres (large sample theory)
- Bayésien (Markov Chain Monte Carlo - MCMC)
 - Basée sur le percentile de la distribution a-posteriori
 - Pas nécessaire de faire recours à des approximations normales (ne s'appuie pas sur large sample theory)
 - Pas de problème si distribution des paramètres très asymétrique
 - Meilleure estimation des paramètres avec des échantillons réduits
 - Intervalles de crédibilité (vs intervalles de confiance)

Analogie avec approche bayésienne



Analogie avec approche bayésienne



Discussion

■ philippe.golay@unige.ch