La prise de décision aux tâches de Gambling

Un modèle bayésien de l'apprentissage individuel

Jean Audusseau
Jacques Juhel
Université Rennes 2

Plan

1. La prise de décision sous incertitude
2. La Children’s Gambling Task
3. Le modèle de la valence espérée
4. L'estimation des paramètres dans un cadre bayésien: simulation MCMC
5. Perspectives

Plan

1. La prise de décision sous incertitude
2. La Children’s Gambling Task
3. Le modèle de la valence espérée
4. L'estimation des paramètres dans un cadre bayésien: simulation MCMC
5. Perspectives

La prise de décision sous incertitude

Prise de décision

→ choix entre au moins deux possibilités d'action, dans la perspective d'atteindre un but.

Incertitude quant aux conséquences d'un choix particulier

La prise de décision sous incertitude

imperméable

p_{pluie}=? p_{soleil}=?

Pluie : gain fort Soleil : perte faible

pas d'imperméable

p_{pluie}=? p_{soleil}=?

Pluie : Perte Forte Soleil : Gain faible

Réduction de l'incertitude par prise en compte des informations pertinentes pour guider la décision :

- les conséquences possibles des différents choix
- les probabilités d'apparition de ces conséquences, estimées notamment sur la base des expériences passées

→ apprentissage

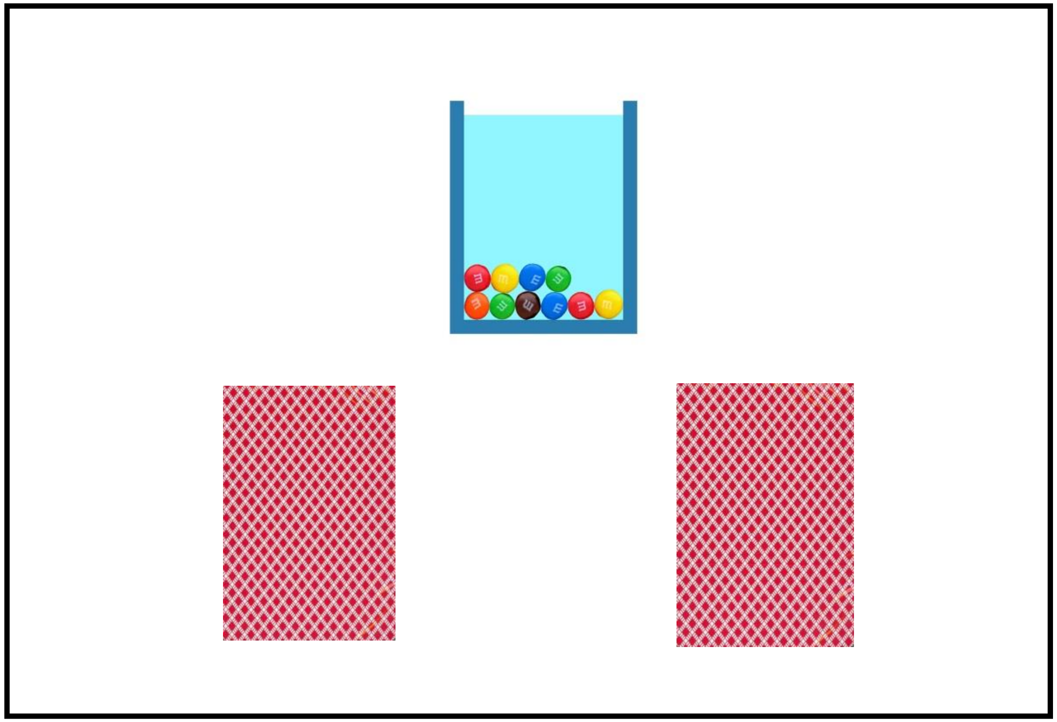
Plan

1. La prise de décision sous incertitude
2. La Children's Gambling Task
   (Zelazo, 2004)
3. Le modèle de la valence espérée
4. L'estimation des paramètres dans un cadre bayésien: simulation MCMC
5. Perspectives

Children's Gambling Task (CGT)

But : gagner le plus de bonbons possible, en piochant dans deux paquets de cartes

100 essais

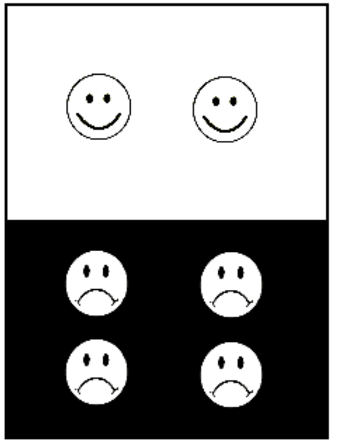


Children’s Gambling Task

- Paquet désavantageux :

  - gain de 2 bonbons

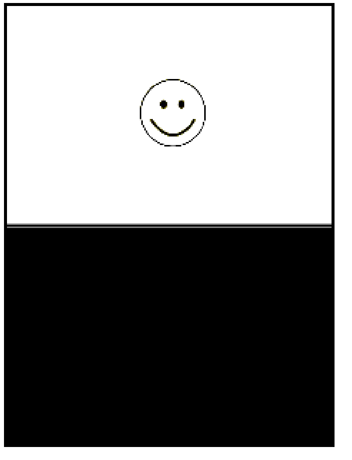
  - perte de 0, 4, 5 ou 6 bonbons



- Paquet avantageux :

  - Gain de 1 bonbon

  - Perte de 0 ou 1 bonbon



Plan

1. La prise de décision sous incertitude
2. La Children's Gambling Task
3. Le modèle de la valence espérée
   (Busemeyer & Stout, 2002)
4. L'estimation des paramètres dans un cadre bayésien: simulation MCMC
5. Perspectives

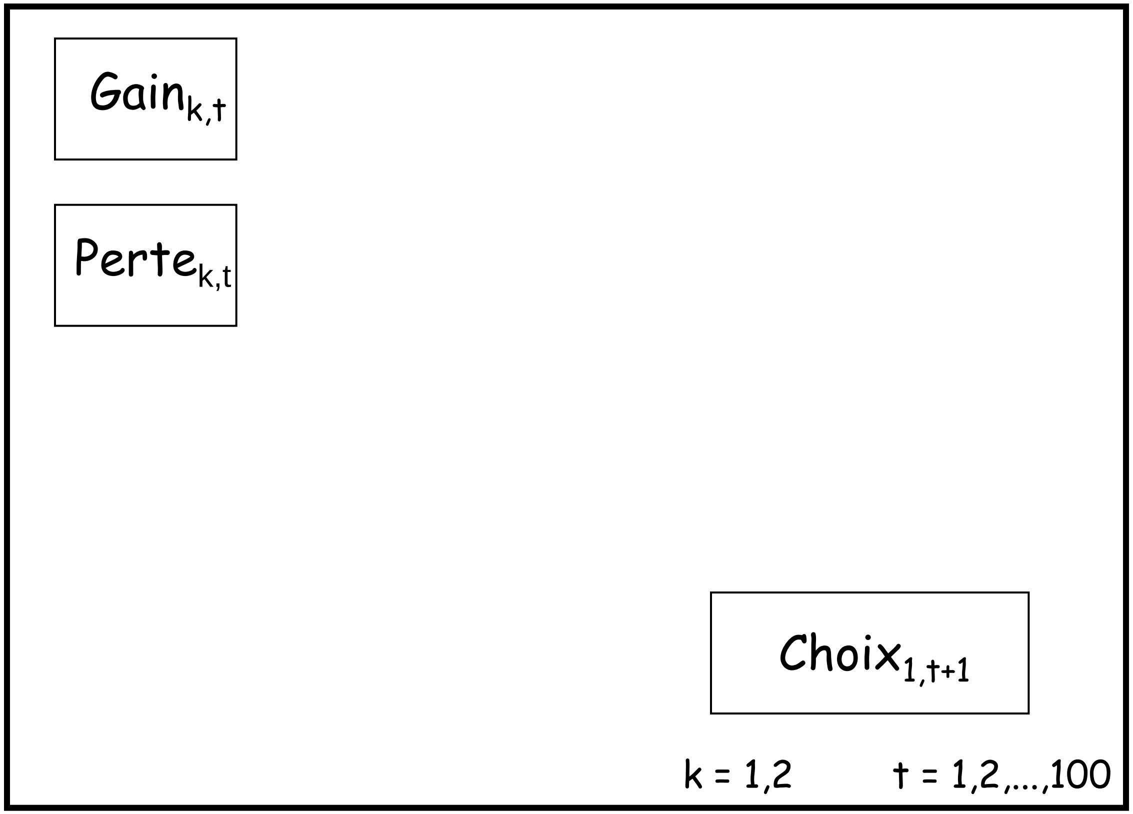
Les modèles cognitifs formels consistent à :

- Proposer une description formelle du lien entre stimuli et performances observables d’un sujet à une tâche

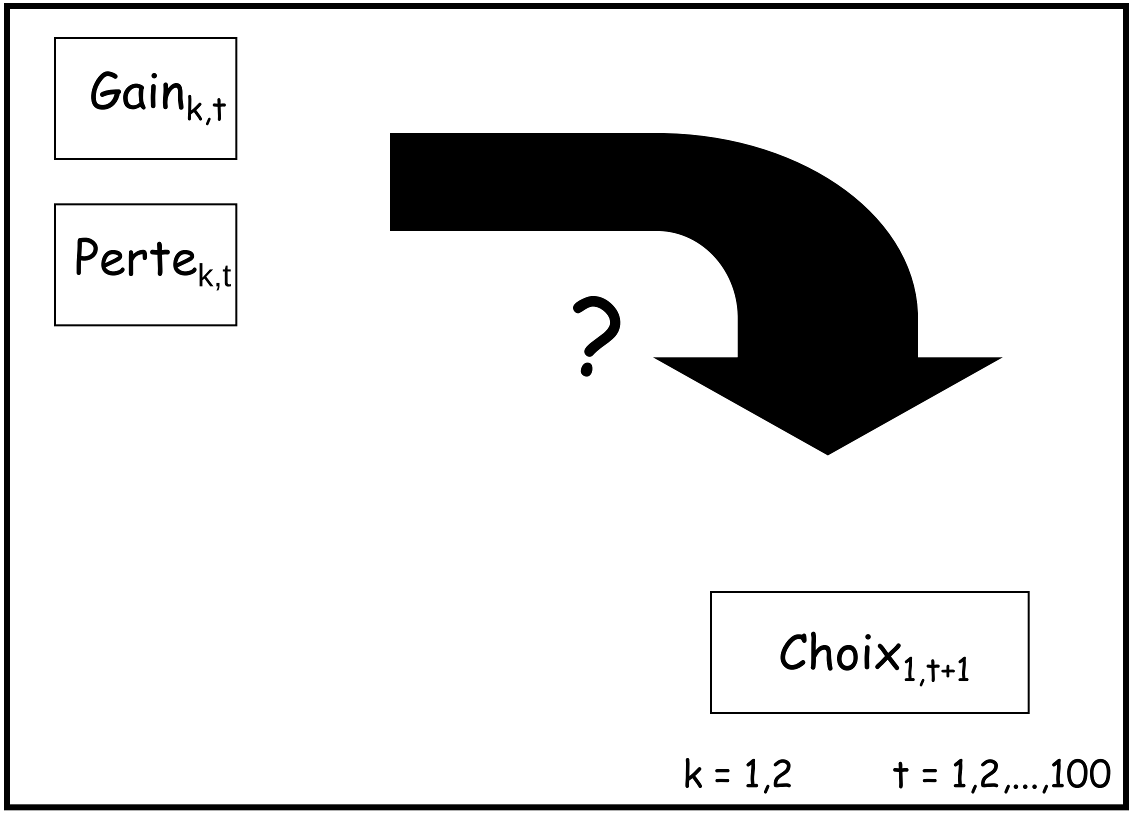
- Formalisation compatible avec ce que l’on sait des processus théoriquement mis en œuvre par l’individu

- Approche analytique : désintrication des processus mobilisés par l’individu

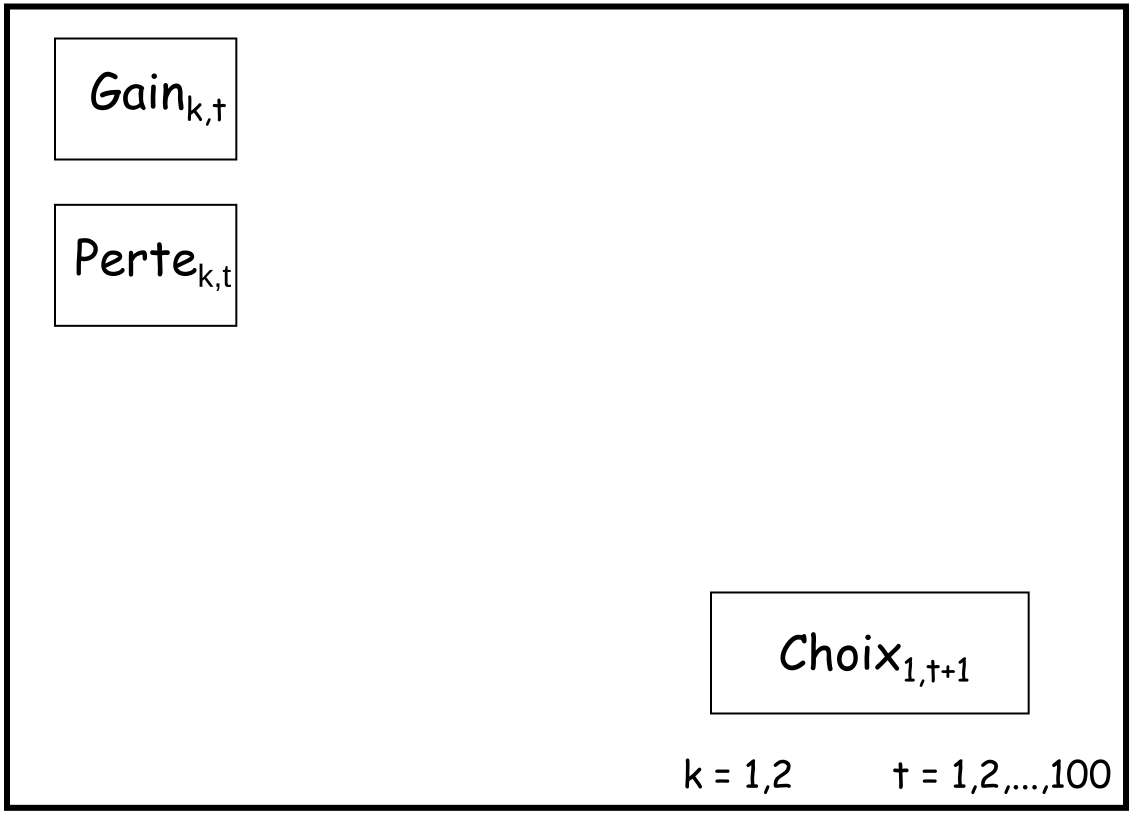
Modèle de la valence espérée



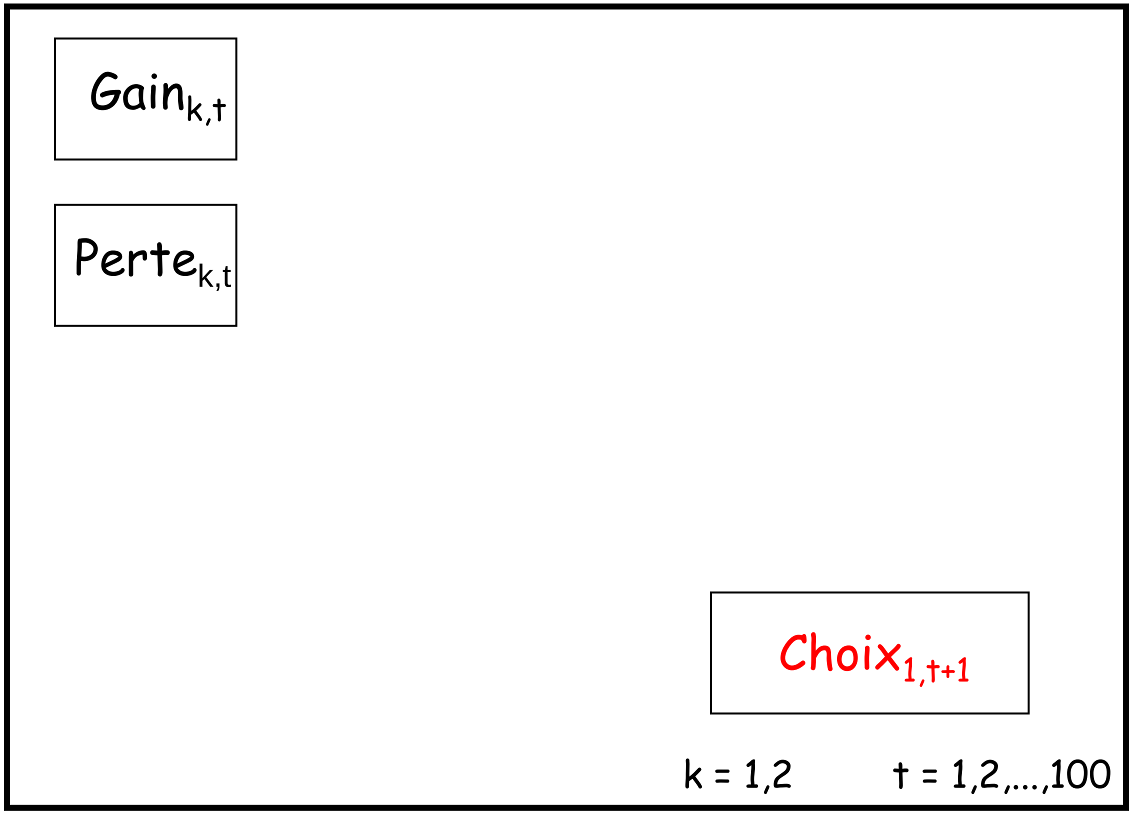
Modèle de la valence espérée



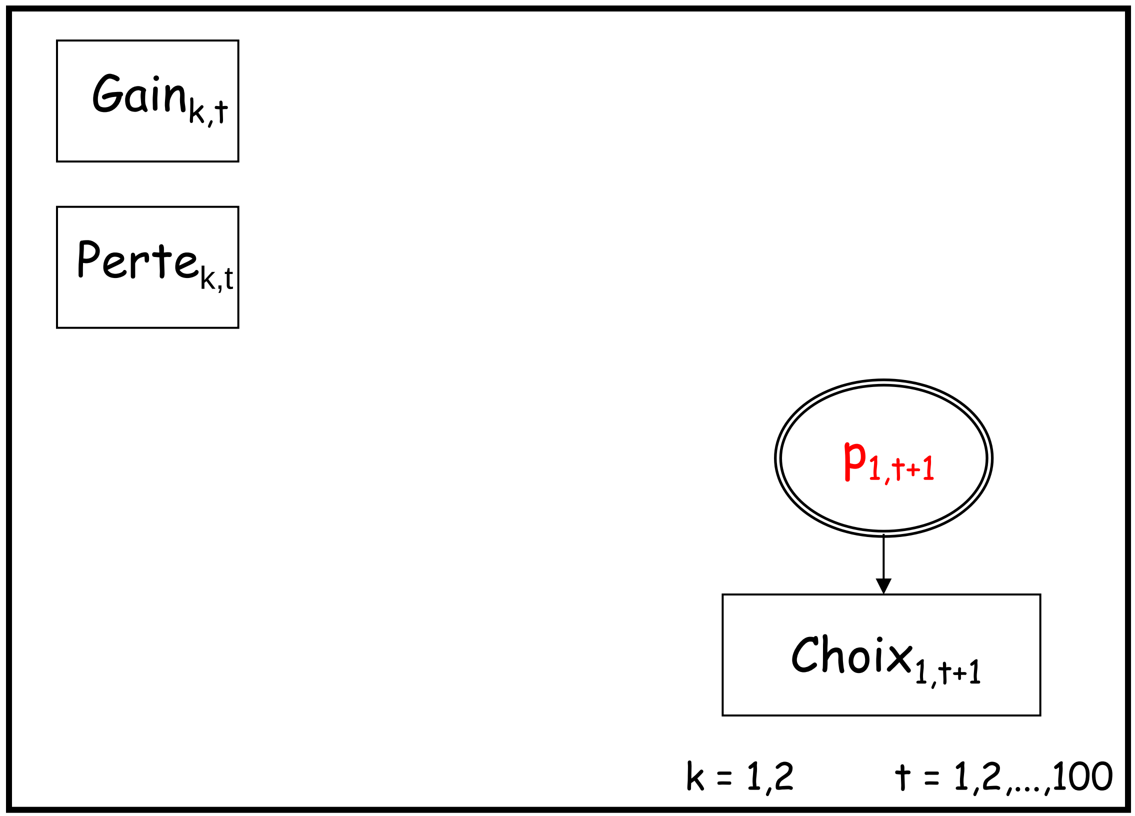
Modèle de la valence espérée



Modèle de la valence espérée

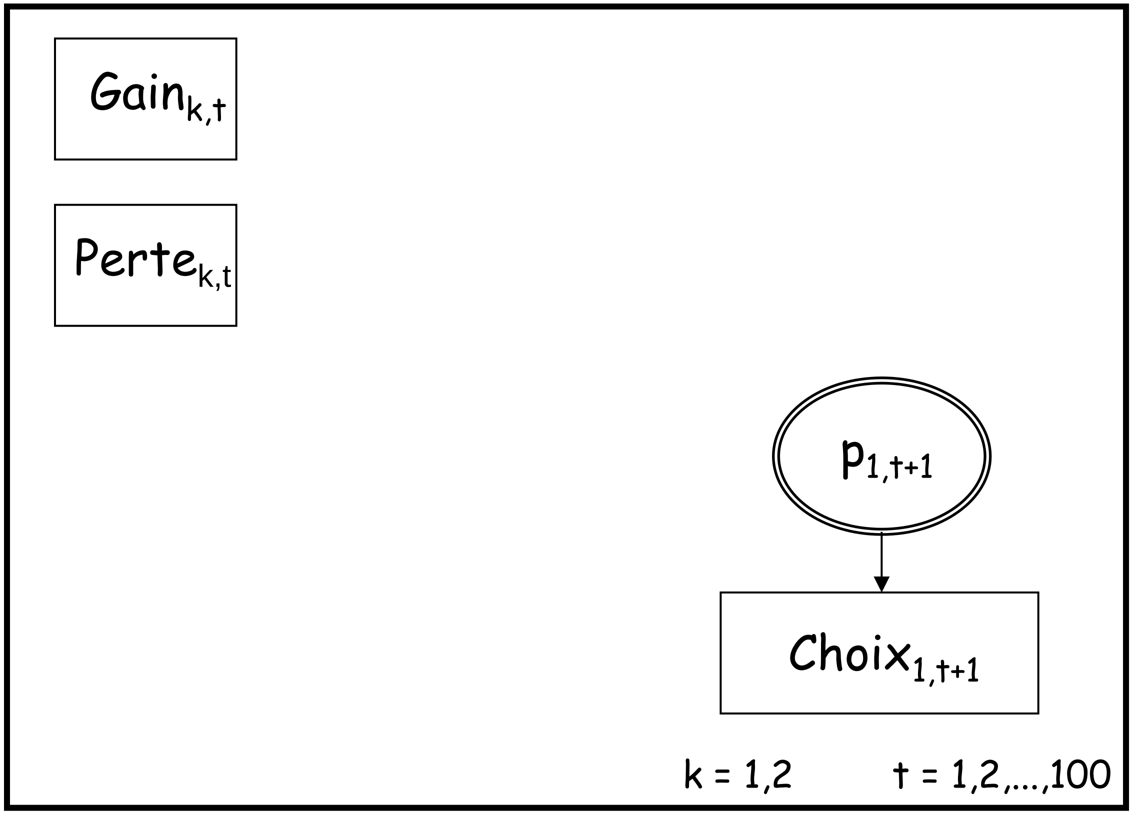


$$Choix_{1,t+1} \sim dbern\,(p_{1,t+1})$$

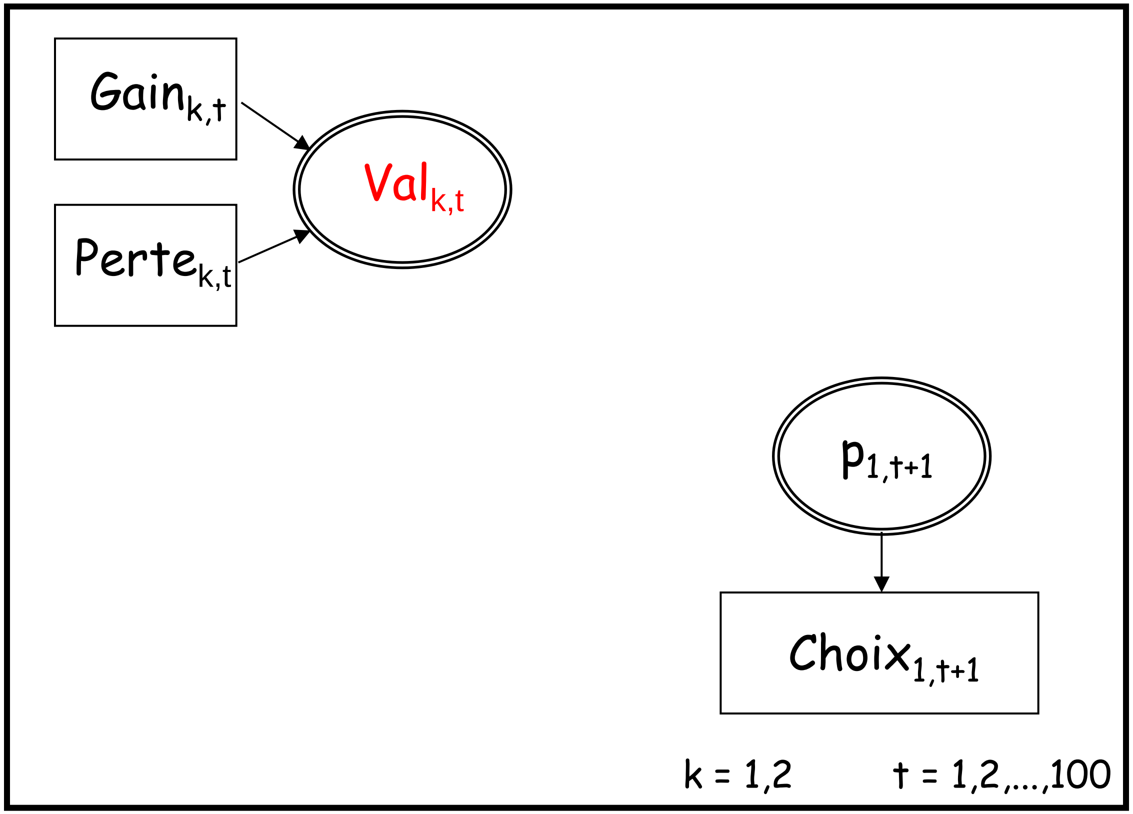


$$\text{Choix}_{k,t+1} \sim \text{dbern}\,(p_{1,t+1})$$

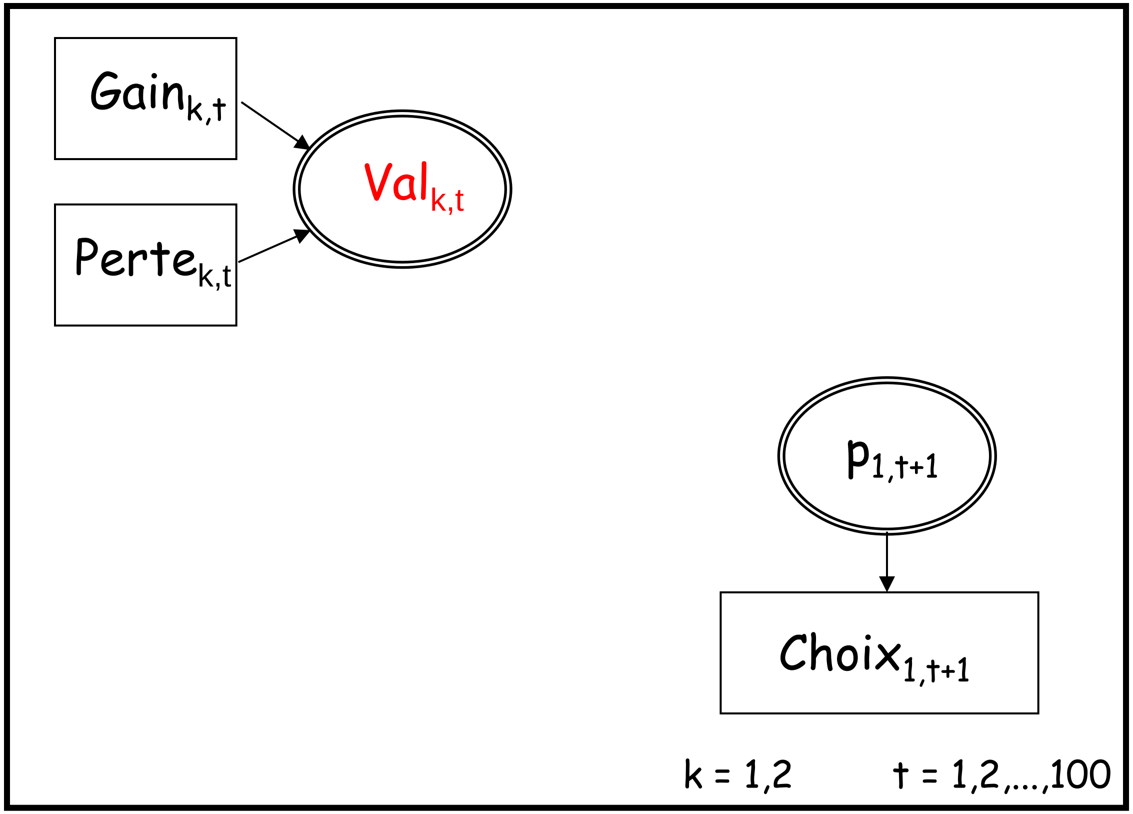
Modèle de la valence espérée



Modèle de la valence espérée

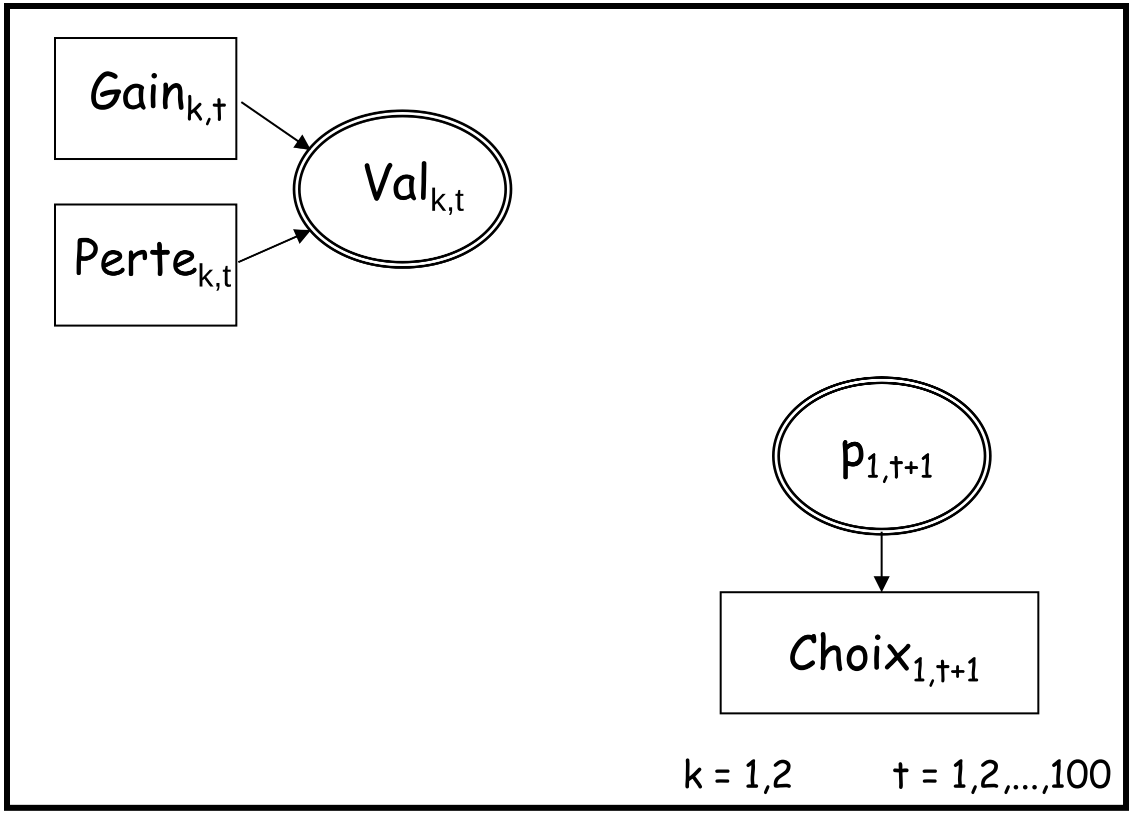


Modèle de la valence espérée



$$\underbrace{Val_{k,t}}_{\substack{\text{Valence ressentie à l'essai t} \\ \text{en piochant dans le paquet k}}} = Gain_{k,t} + Perte_{k,t}$$

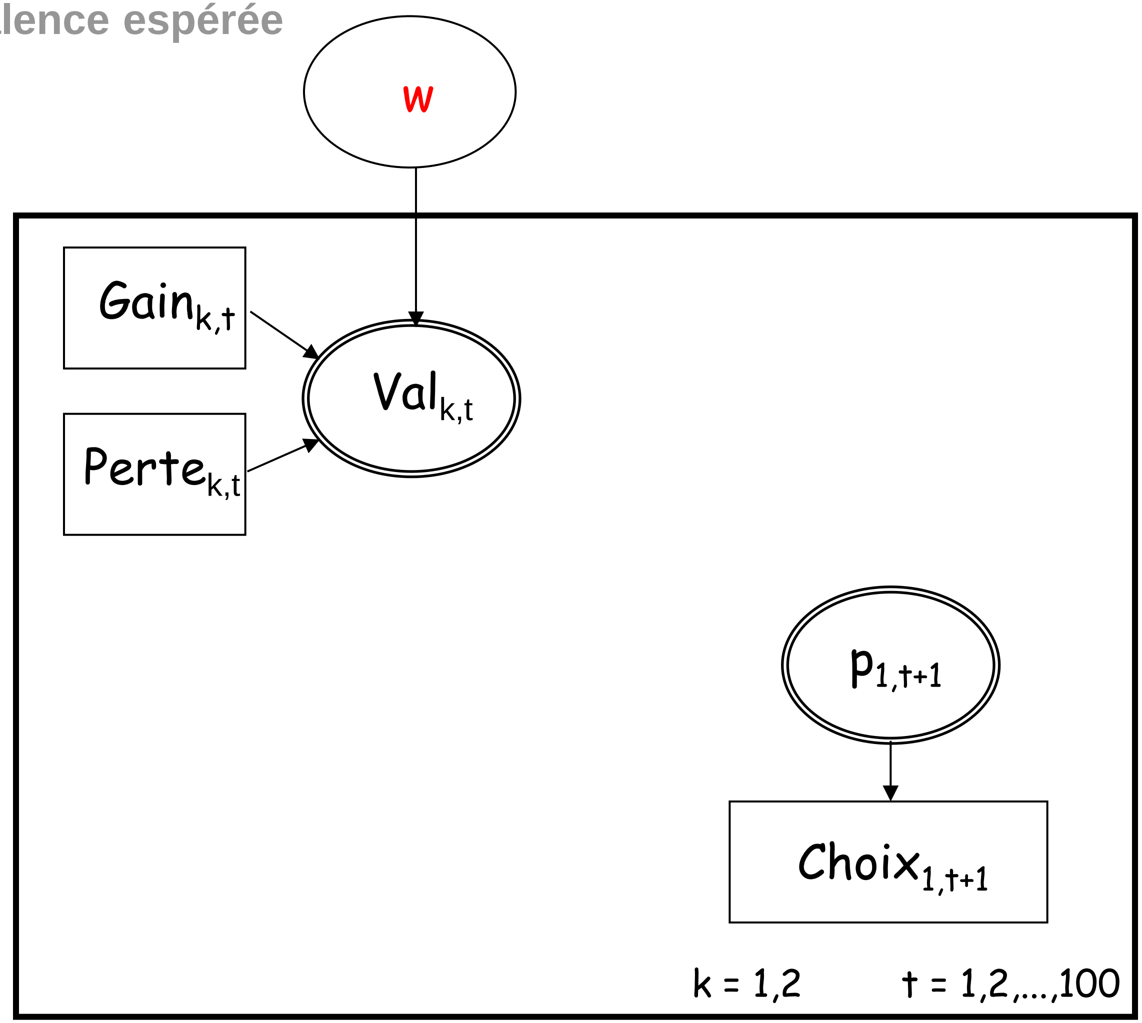
Modèle de la valence espérée



$$Val_{k,t} = (1-\underbrace{w}_{\text{Attention allouée aux gains vs pertes}})*Gain_{k,t} + w*Perte_{k,t}$$

$$w \in [0;1]$$

Modèle de la valence espérée

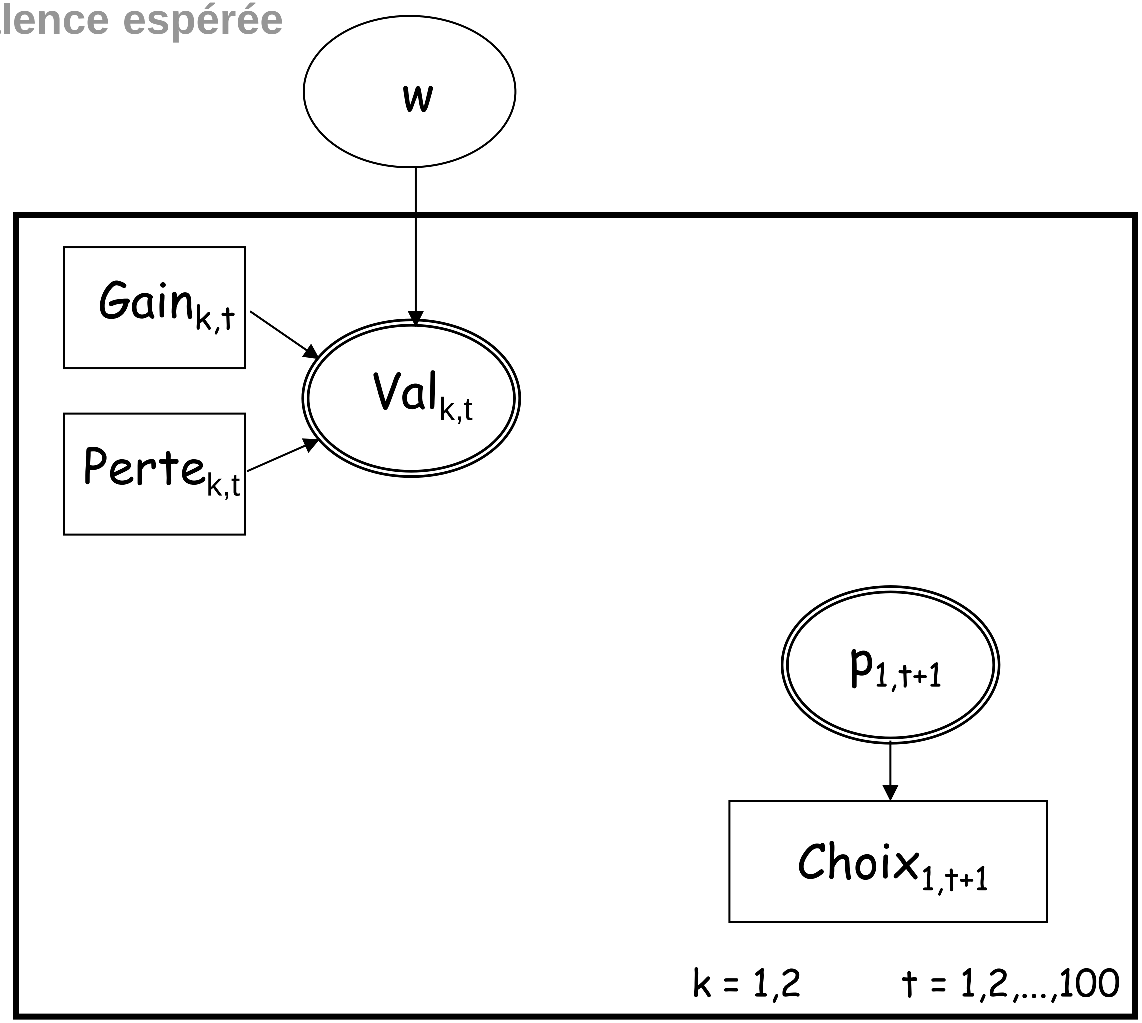


$$Val_{k,t} = (1-\underbrace{w}_{})*Gain_{k,t} + w*Perte_{k,t}$$

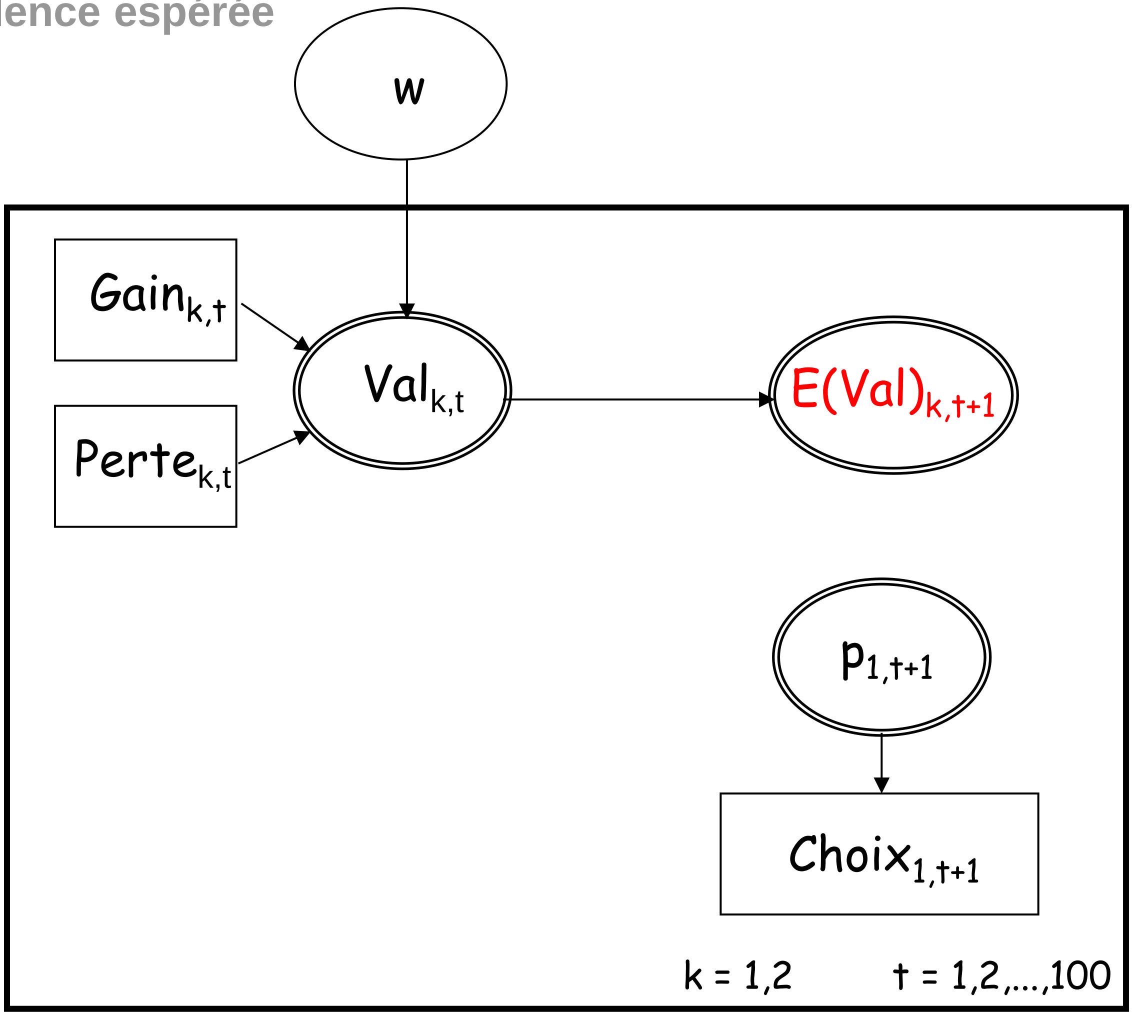
Attention allouée aux gains vs pertes

$$w \in [0;1]$$

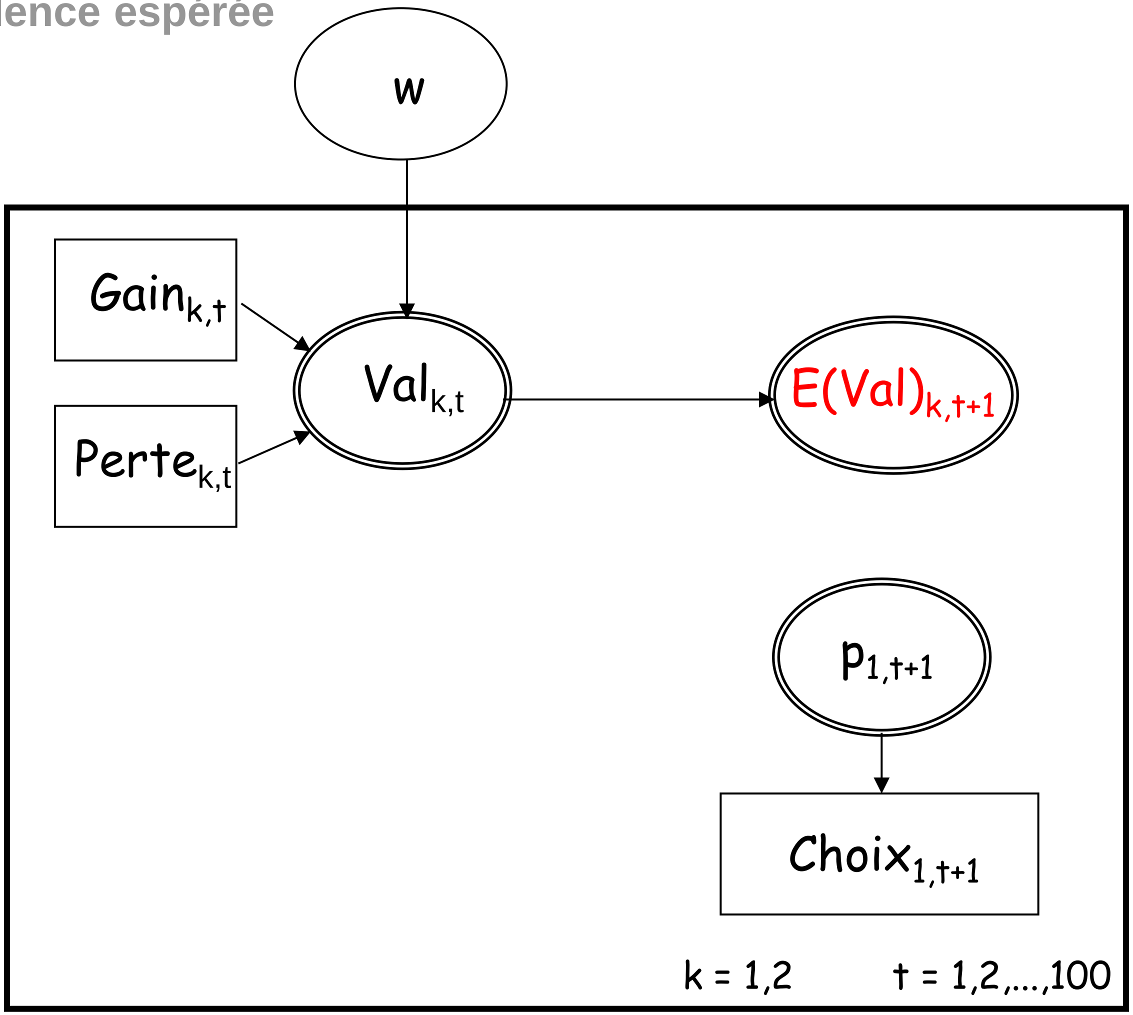
Modèle de la valence espérée



Modèle de la valence espérée

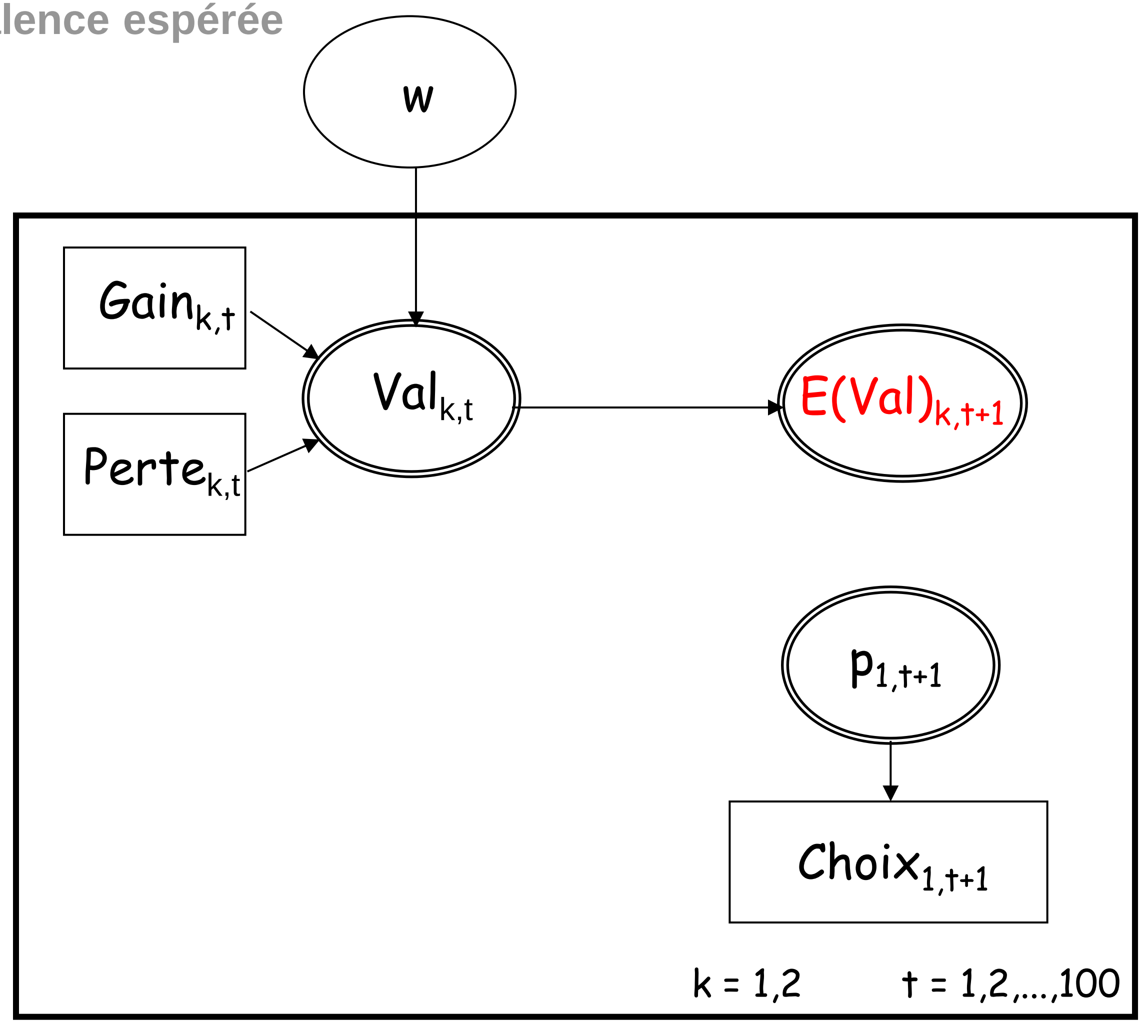


Modèle de la valence espérée



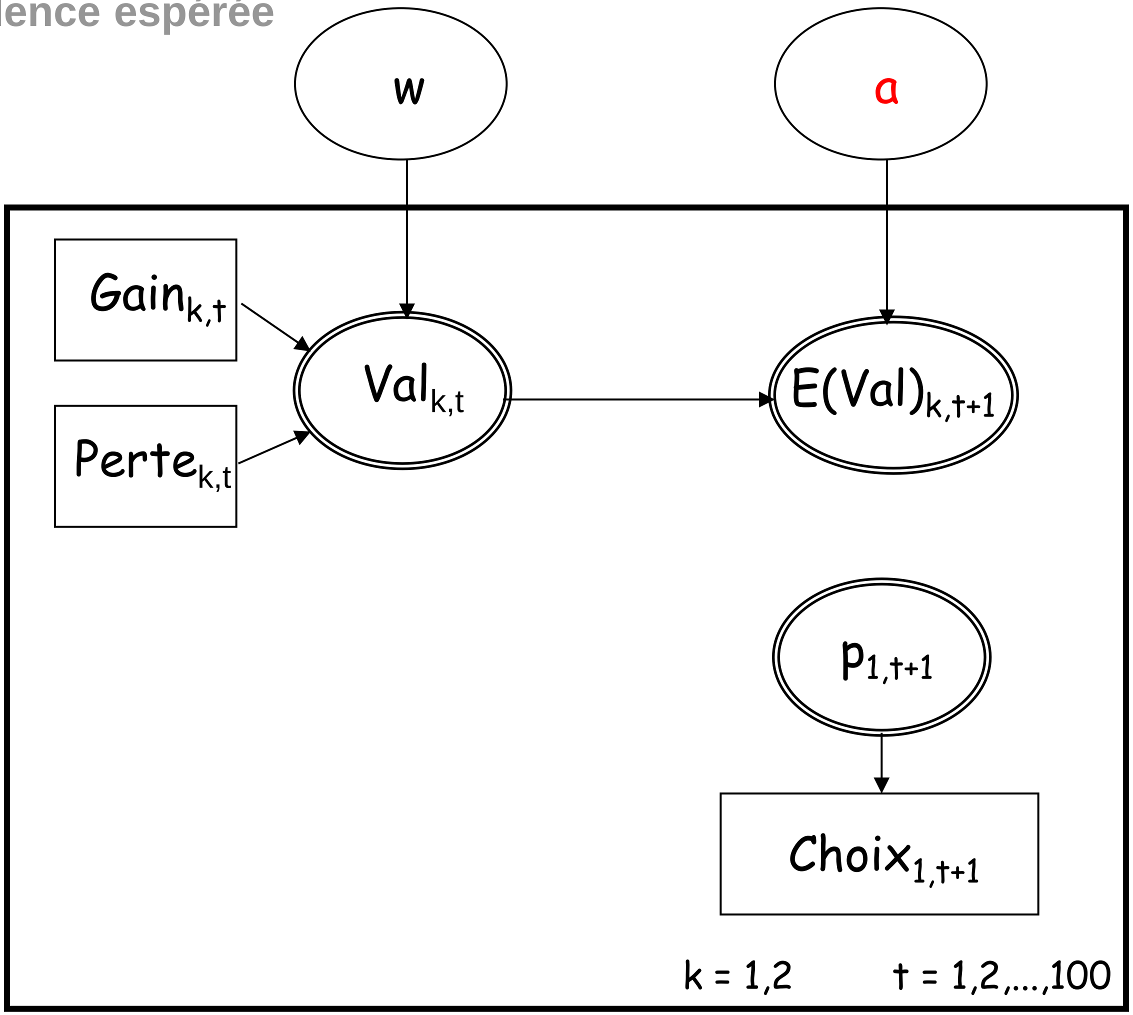
$$\underbrace{E(Val)_{k,t+1}}_{\text{Valence espérée}} = E(Val)_{k,t} +$$

Modèle de la valence espérée



$$\underbrace{E(Val)_{k,t+1}}_{\text{Valence espérée}} = E(Val)_{k,t} + (\underbrace{Val_{k,t} - E(Val)_{k,t}}_{\text{Ampleur de la désillusion du sujet}})$$

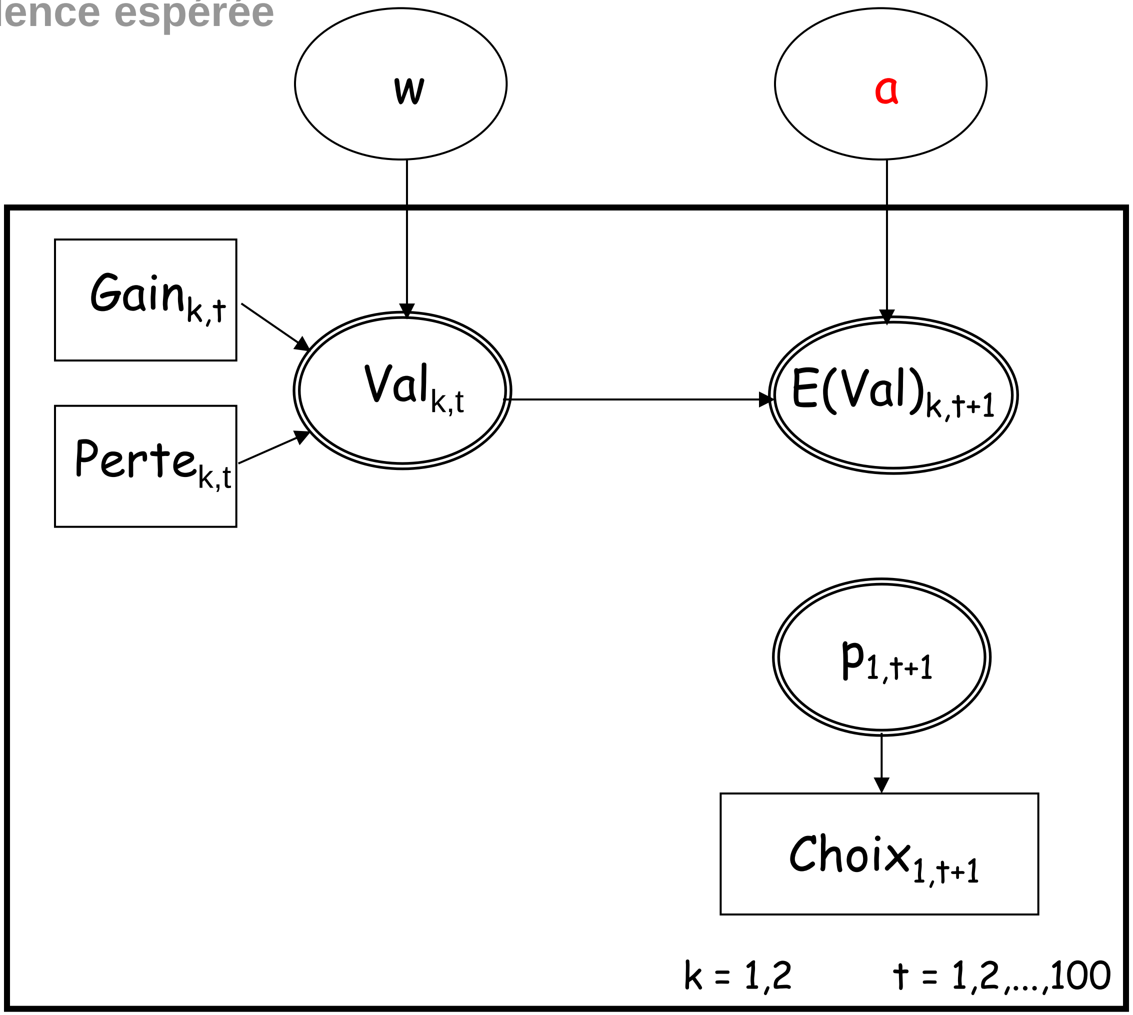
Modèle de la valence espérée



$$E(Val)_{k,t+1} = E(Val)_{k,t} + a * (Val_{k,t} - E(Val)_{k,t})$$

$$a \in [0;1]$$

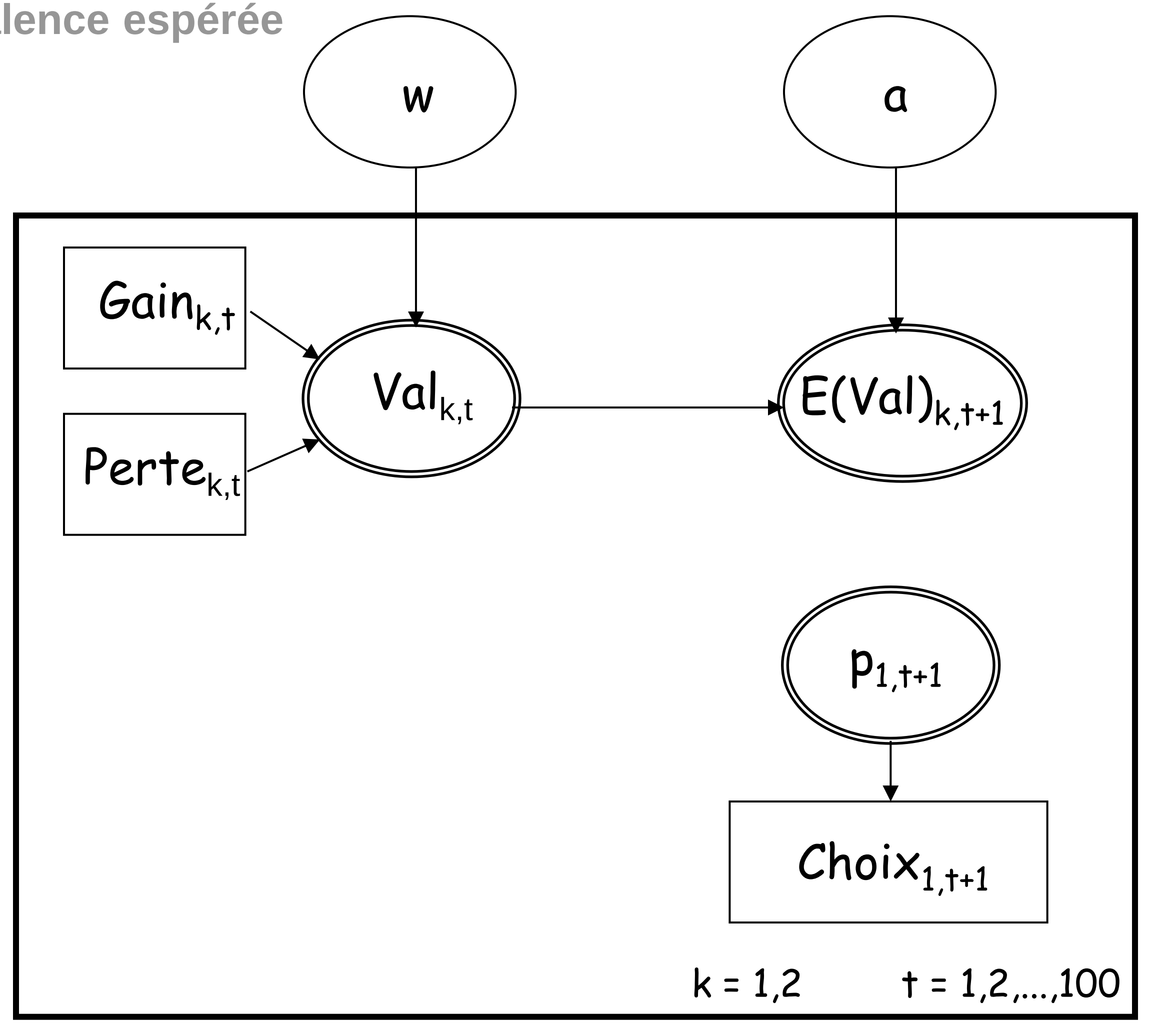
Modèle de la valence espérée



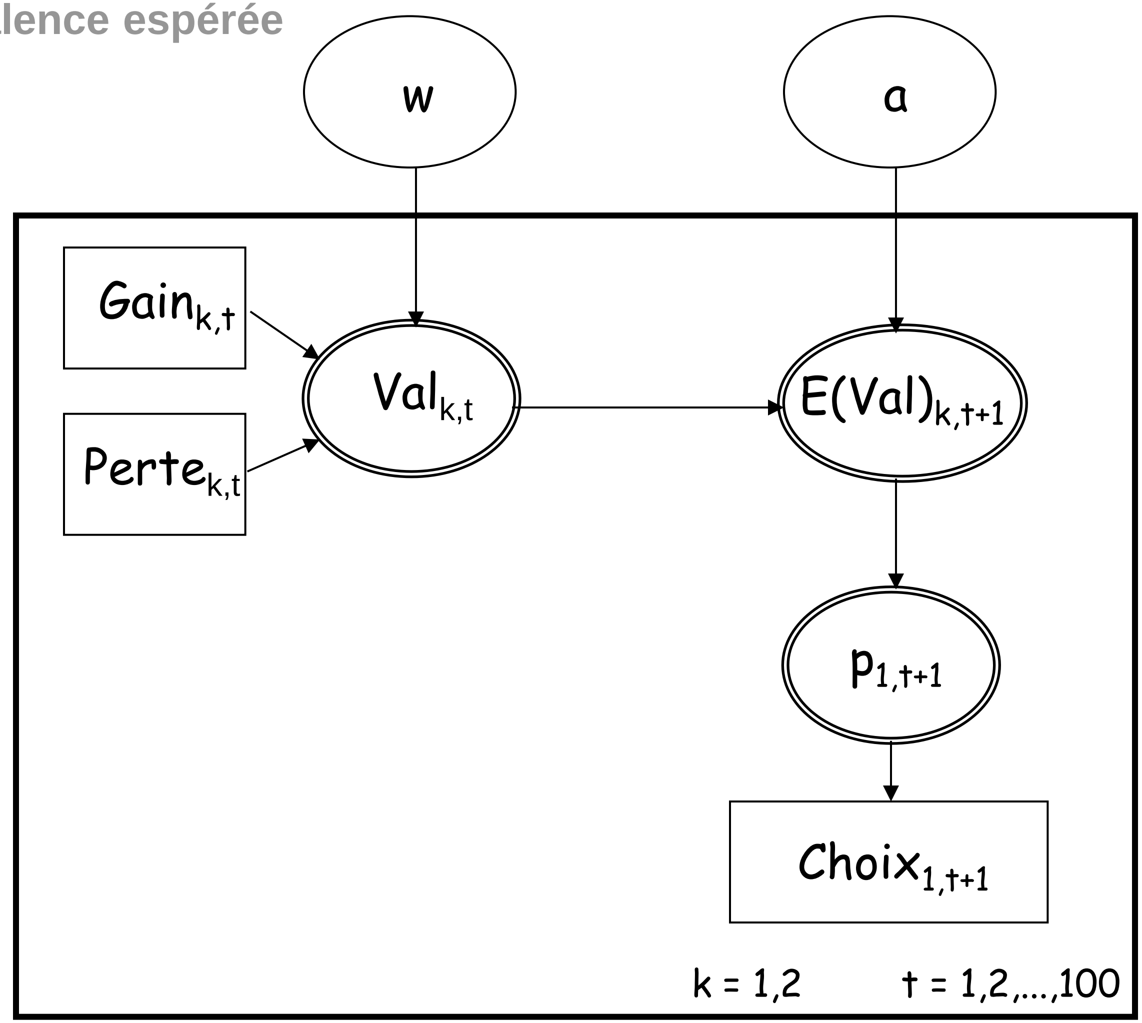
$$E(Val)_{k,t+1} = E(Val)_{k,t} + \underbrace{a}_{\text{Taux de mise à jour de la valence espérée}} * (Val_{k,t} - E(Val)_{k,t})$$

$$a \in [0;1]$$

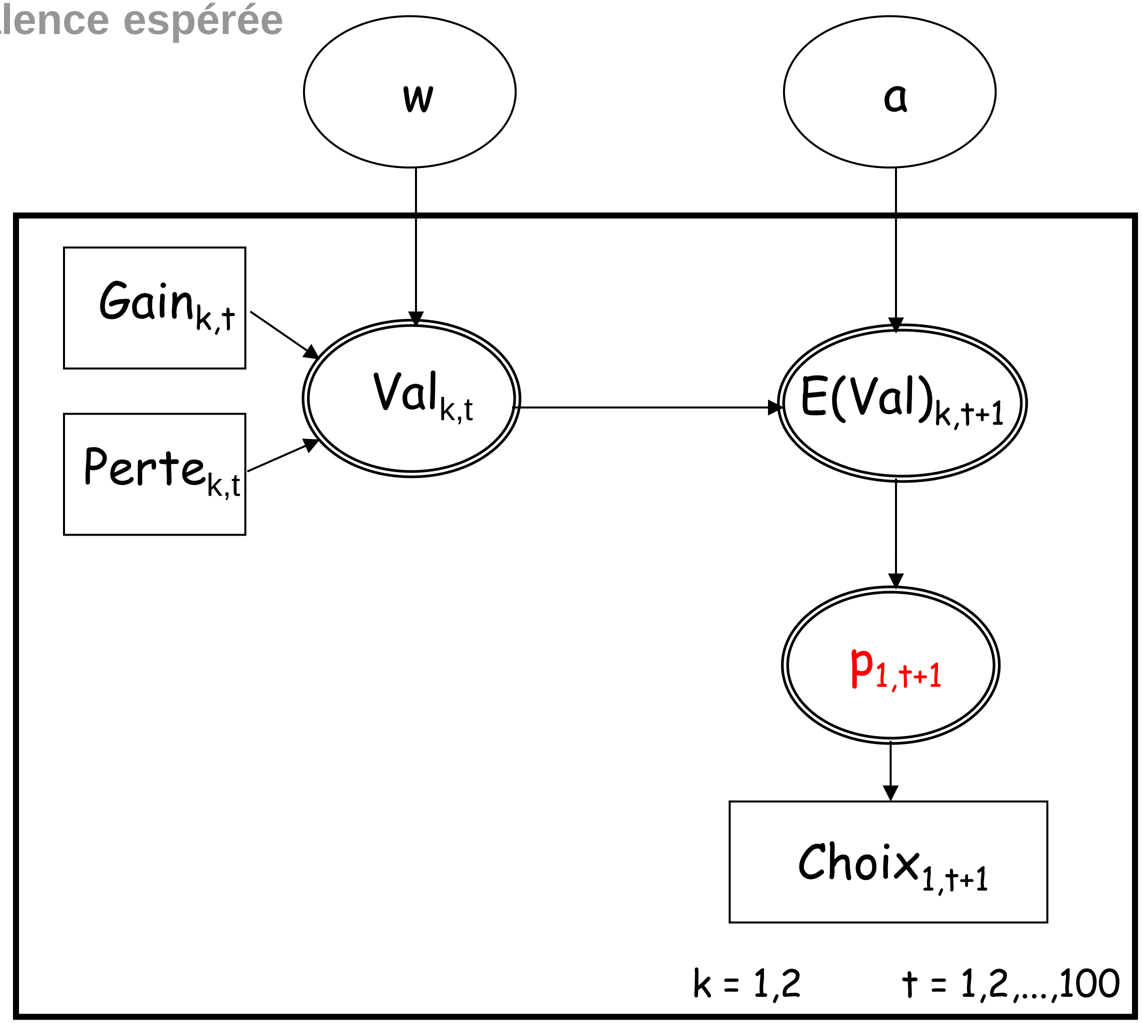
Modèle de la valence espérée



Modèle de la valence espérée

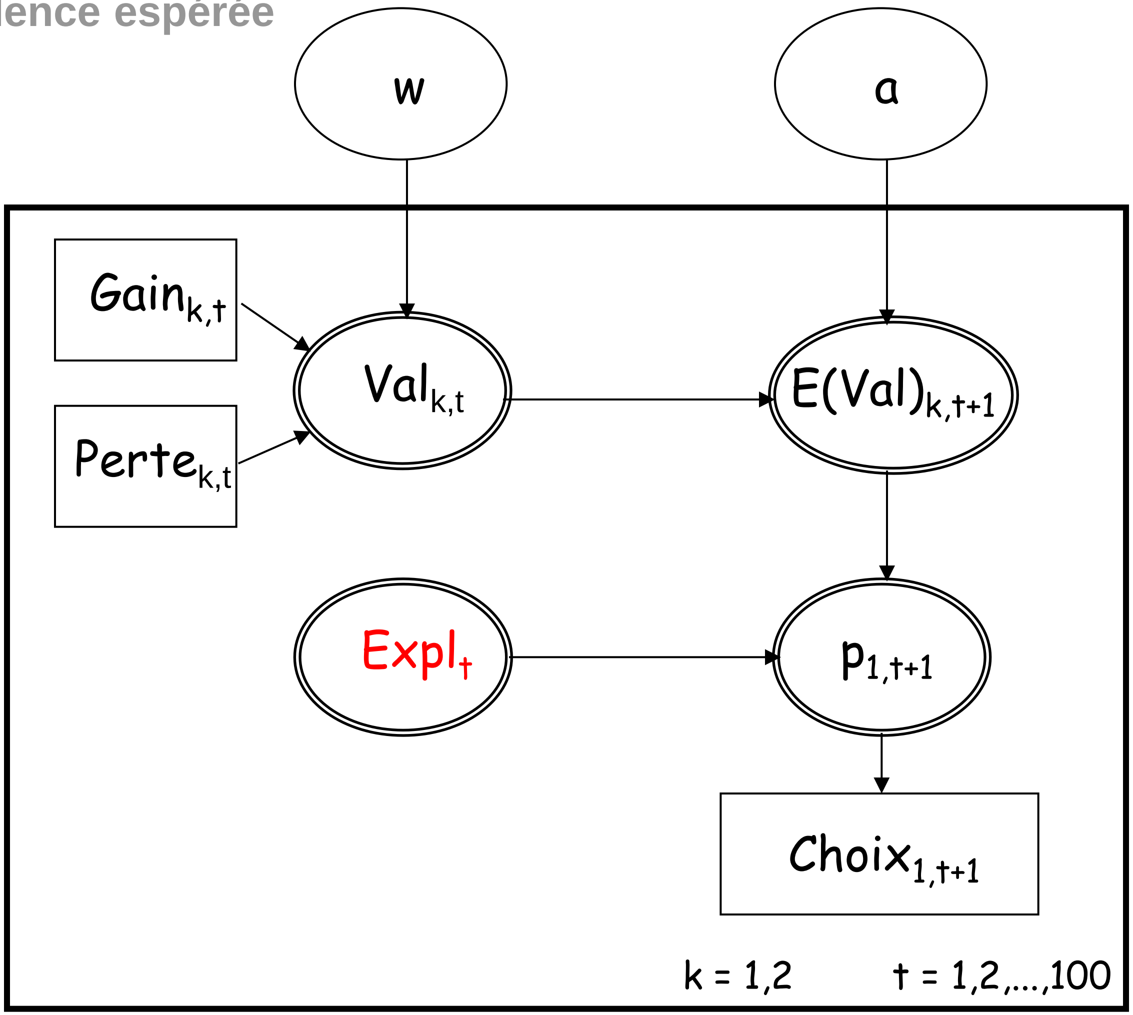


Modèle de la valence espérée



$$p_{1,t+1} = \frac{e^{E(Val)_{1,t}}}{e^{E(Val)_{1,t}} + e^{E(Val)_{2,t}}}$$

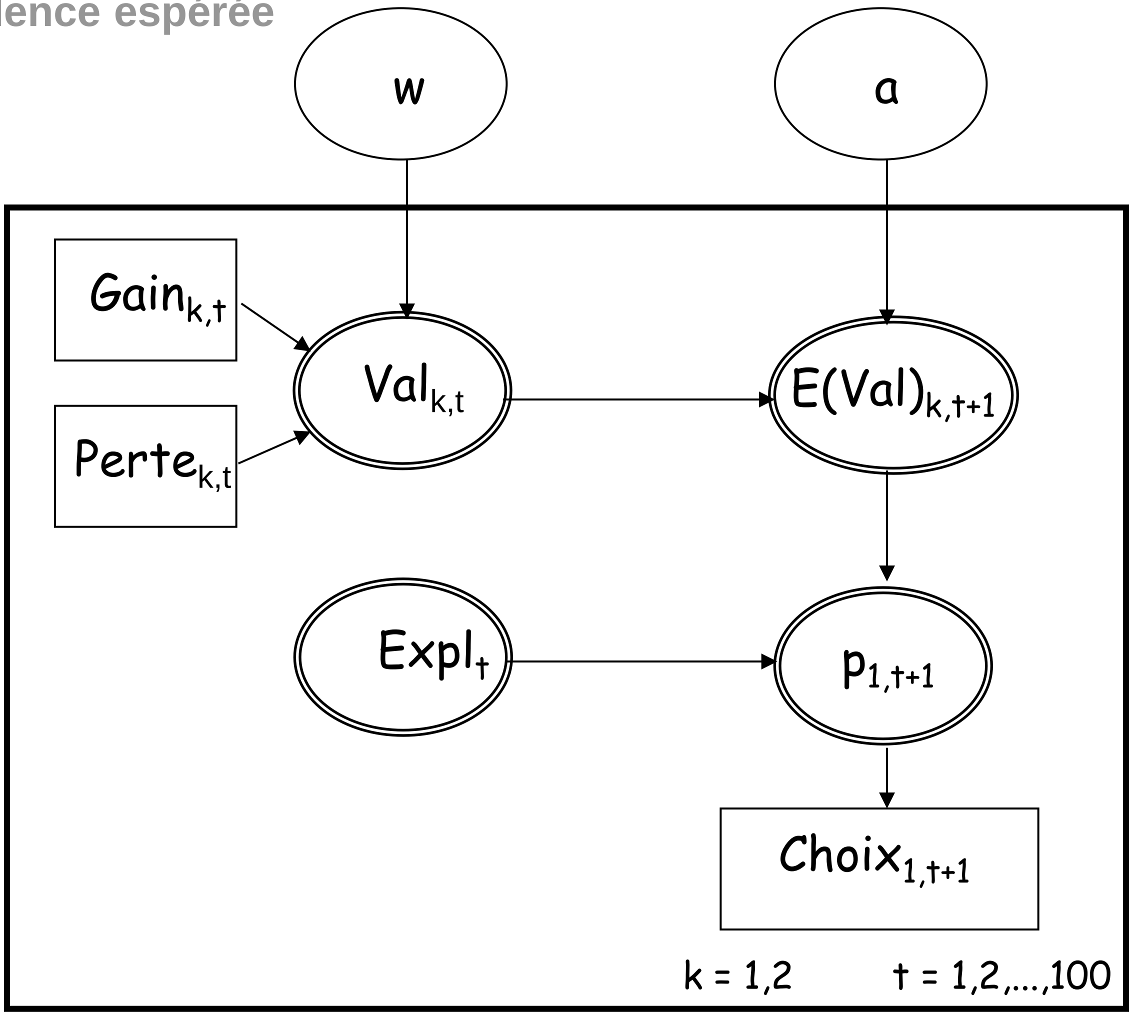
Modèle de la valence espérée



$$p_{1,t+1} = \frac{e^{E(Val)_{1,t}/Expl_t}}{e^{E(Val)_{1,t}/Expl_t} + e^{E(Val)_{2,t}/Expl_t}}$$

Expl$_t$:
ampleur de l'exploration du sujet lors de l'essai considéré

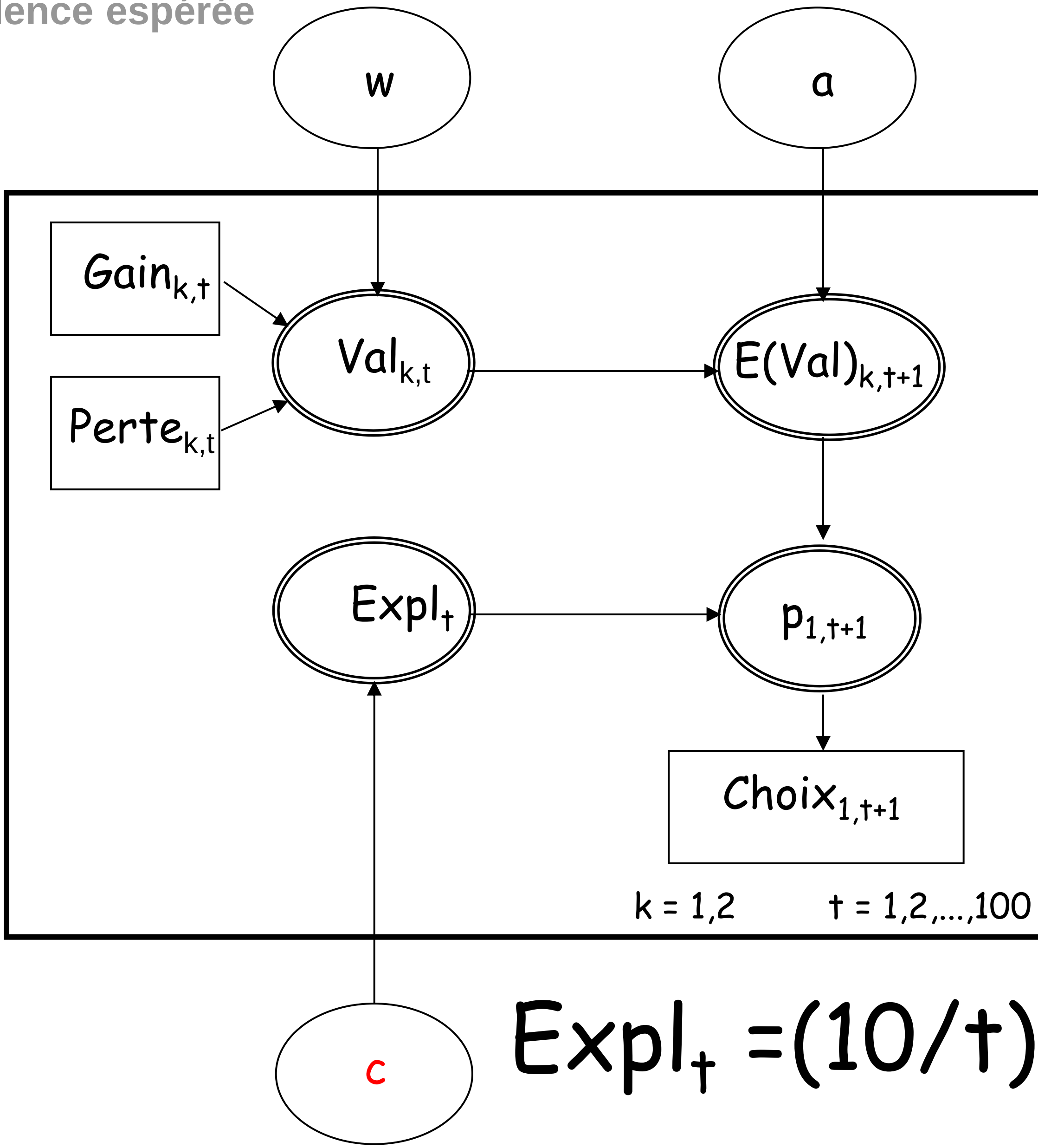
Modèle de la valence espérée



$$Expl_t = (10/t)^{c} \qquad c \in [-5;5]$$

c : vitesse de décroissance des conduites d'exploration du sujet

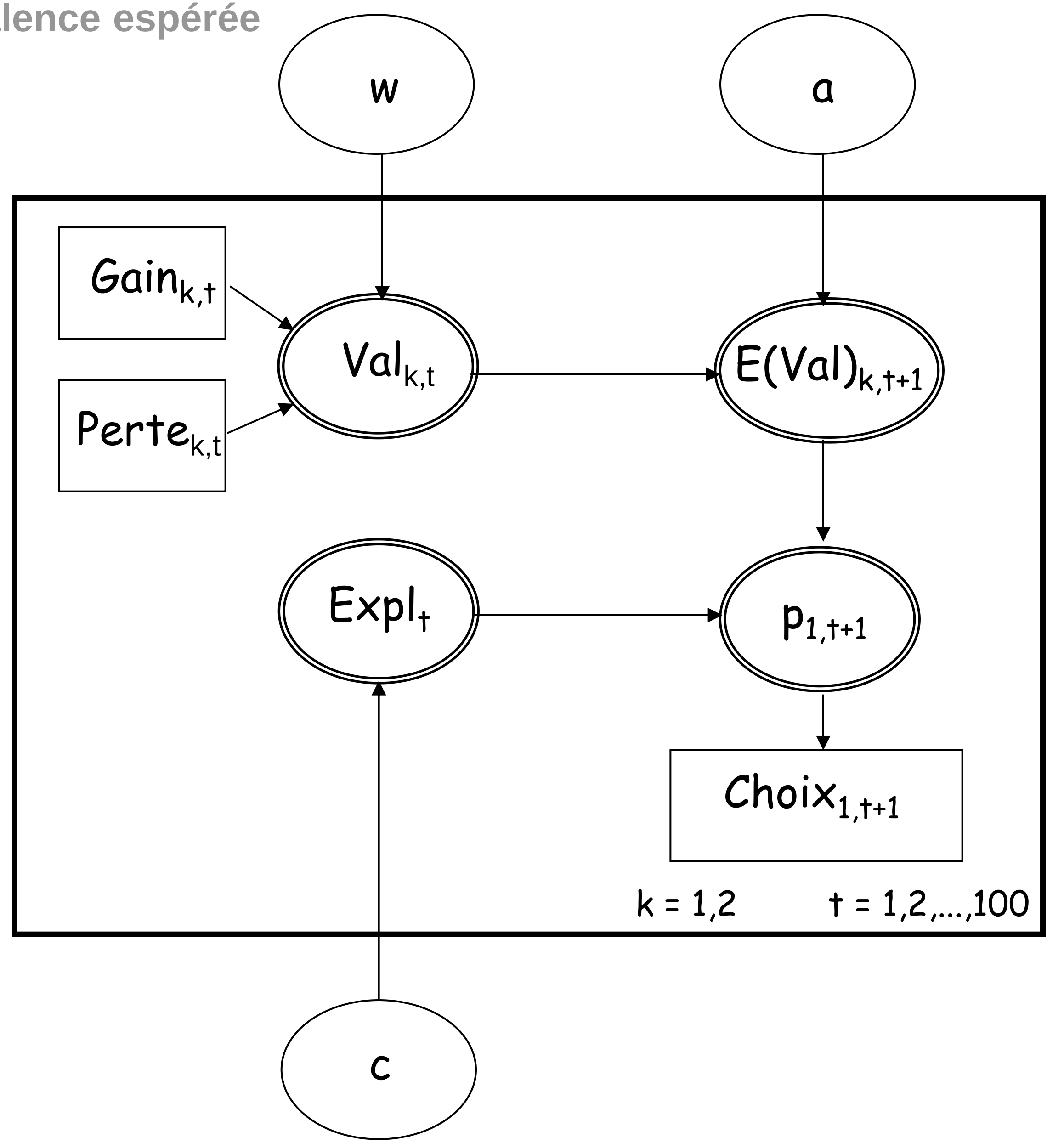
Modèle de la valence espérée



$$Expl_t = (10/t)^c \quad c \in [-5;5]$$

c : vitesse de décroissance des conduites d'exploration du sujet

Modèle de la valence espérée



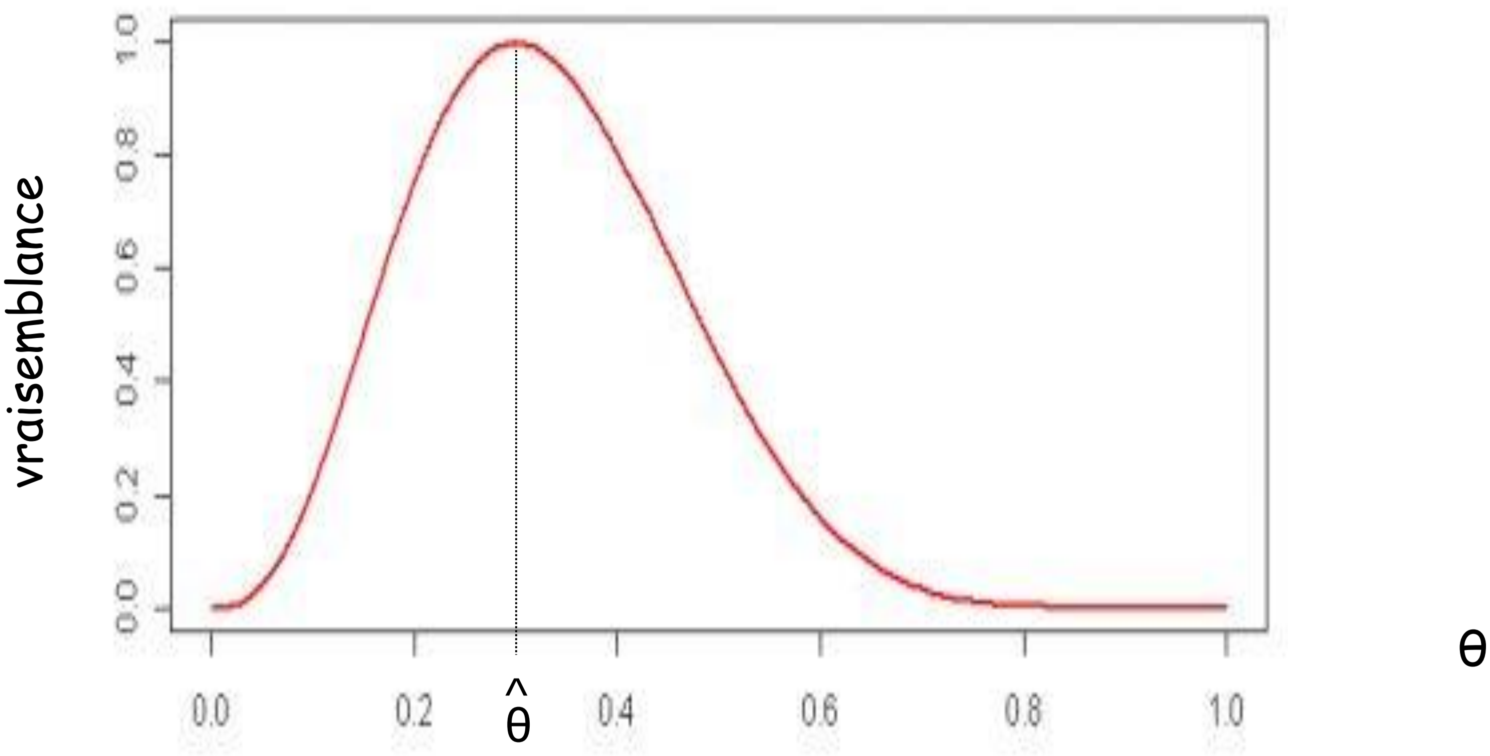
Plan

1. La prise de décision sous incertitude
2. La Children’s Gambling Task
3. Le modèle de la valence espérée
4. L'estimation des paramètres dans un cadre bayésien: simulation MCMC
5. Perspectives

Approche par maximum de vraisemblance

- Vraisemblance d'un modèle :

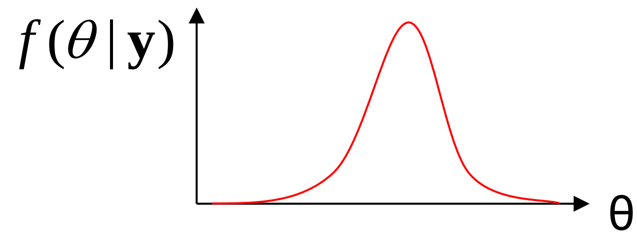
$$f(\mathbf{y} \mid \theta)$$



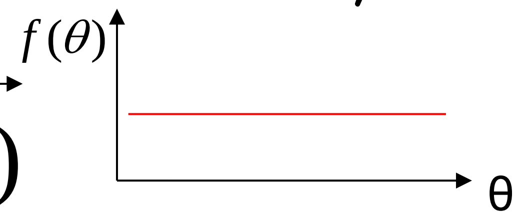
L'approche bayésienne : principe de base

Distribution a posteriori :

$$f(\theta \mid \mathbf{y})$$



Paramètres considérés comme des variables aléatoires, distribution a posteriori :



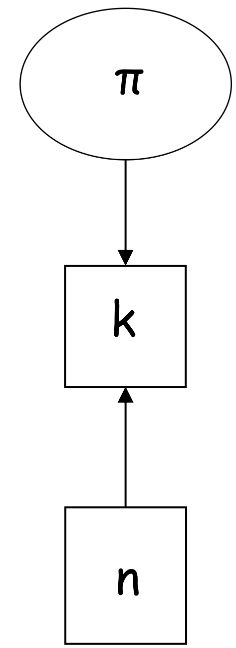
$$f(\theta \mid \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y} \mid \theta) * f(\theta)}{f(\mathbf{y})}$$

Ou plus simplement :

$$\underbrace{f(\theta \mid \mathbf{y})}_{\substack{\text{Distribution} \\ \text{a posteriori}}} \propto \underbrace{f(\mathbf{y} \mid \theta)}_{\substack{\text{Fonction de} \\ \text{vraisemblance}}} * \underbrace{f(\theta)}_{\substack{\text{Distribution} \\ \text{a priori}}}$$

Exemple

Inférer la probabilité π d'obtenir l'évènement « pile » en lançant une pièce.
On procède à n lancers et on obtient k fois l'évènement « pile ».



<u>Fonction de vraisemblance :</u>

k ~ dbin (n,π)

$$f(k\mid\pi)=C_n^k\pi^k(1-\pi)^{n-k}$$

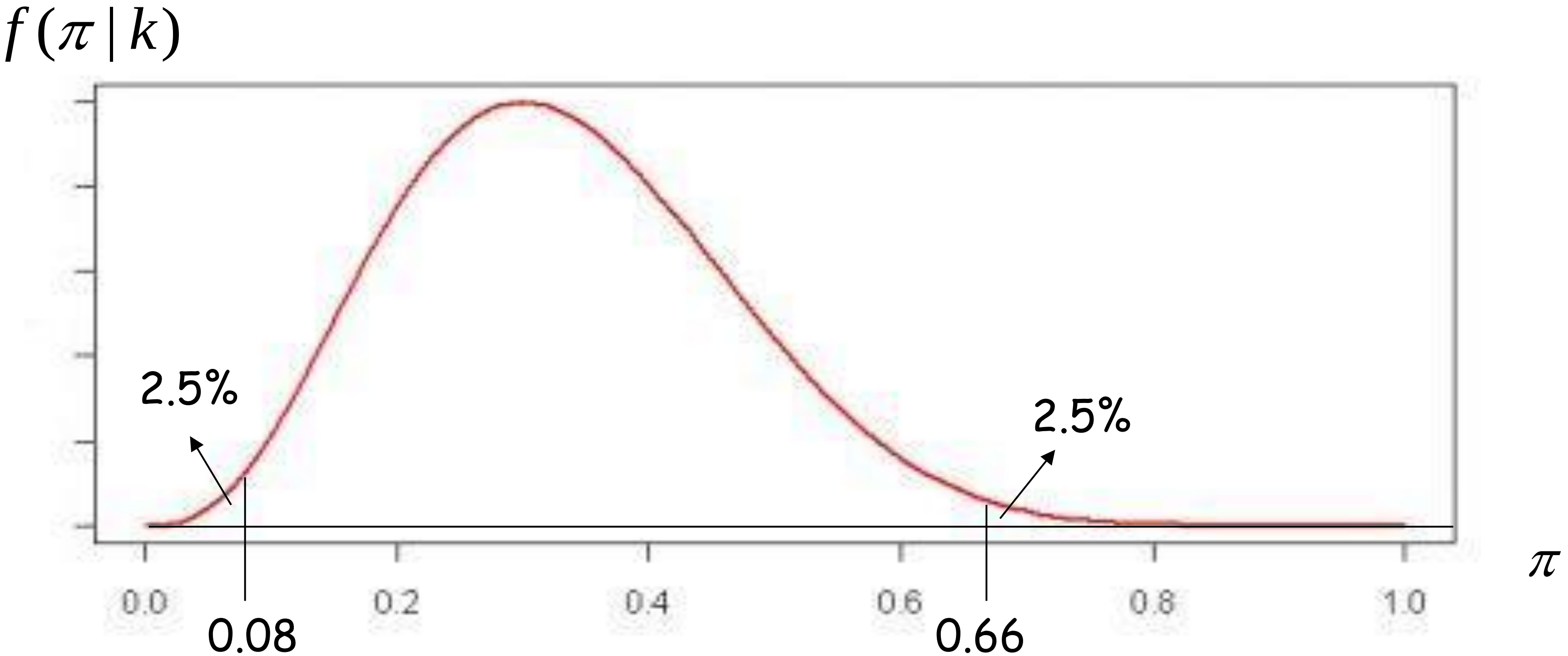
<u>Distribution a priori :</u>

π ~ dbeta (α,β)

$$f(\pi\mid\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}*\pi^{\alpha-1}*(1-\pi)^{\beta-1}$$

La distribution a posteriori f(π|k) est obtenue (à une constante multiplicative près) en effectuant le produit de ces deux équations.

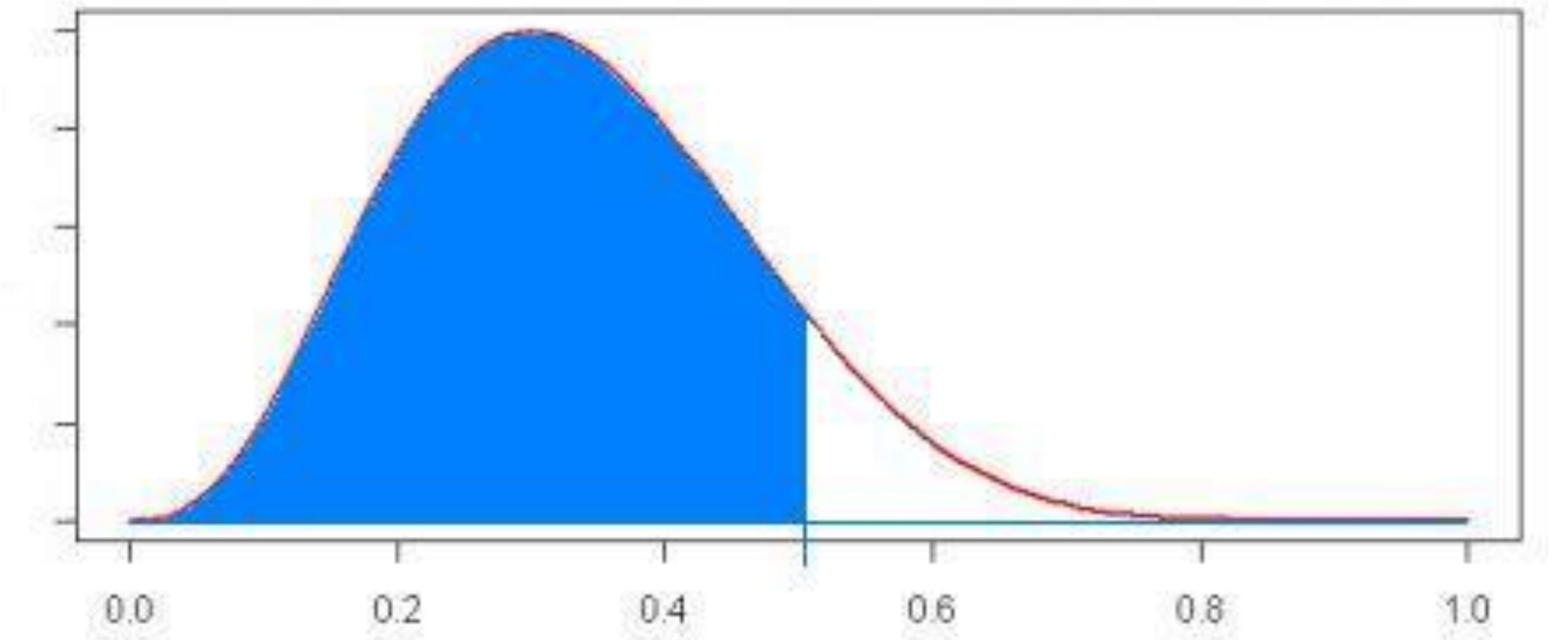
Exemple



Interprétation : « la probabilité que π se situe entre .08 et .66 est de 0.95 »

Exemple

$f(\pi \mid k)$



π

p(π<0.5)

Mais comment intégrer cette distribution a posteriori...?

Pour les distributions les plus communes (normale, beta, gamma,...), les logiciels offrent des fonctions facilement utilisables. Ex. sous R : qnorm, qbeta, qgamma,...

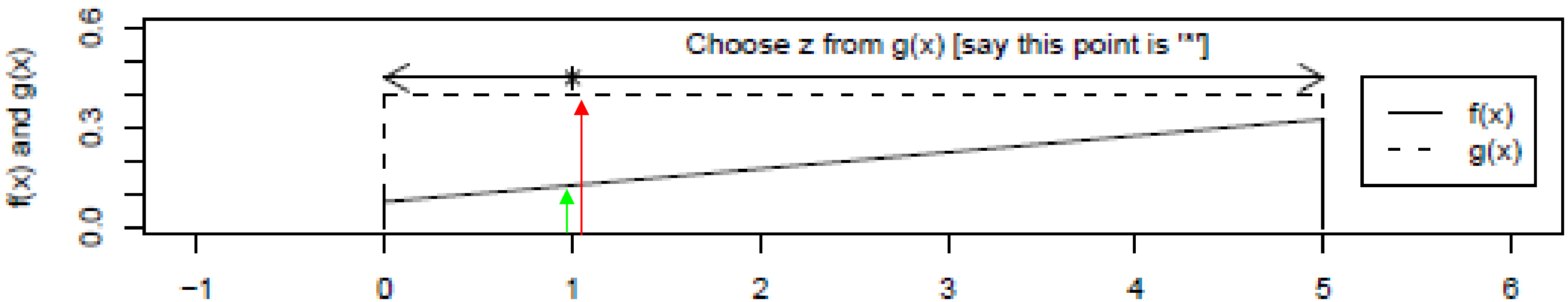
Mais bien souvent, la distribution a posteriori ne correspond à aucune de ces distributions, ce qui est notamment fréquent lorsque le modèle est multivarié.

Une solution : la simulation MCMC (Monte Carlo Markov Chain)

Simuler une distribution « classique » à un paramètre : ex. de la fonction runif sous R.

Simuler une distribution « complexe » à un paramètre : algorithme de rejet

$$f(x) = \frac{1}{40} * 2x + 3$$



1. Simuler une valeur z dans *g*(x). Ex.: on obtient z = 1.

2. Calculer R=f(z)/*g*(z)=f(1)/*g*(1) $\quad R \in [0;1]$

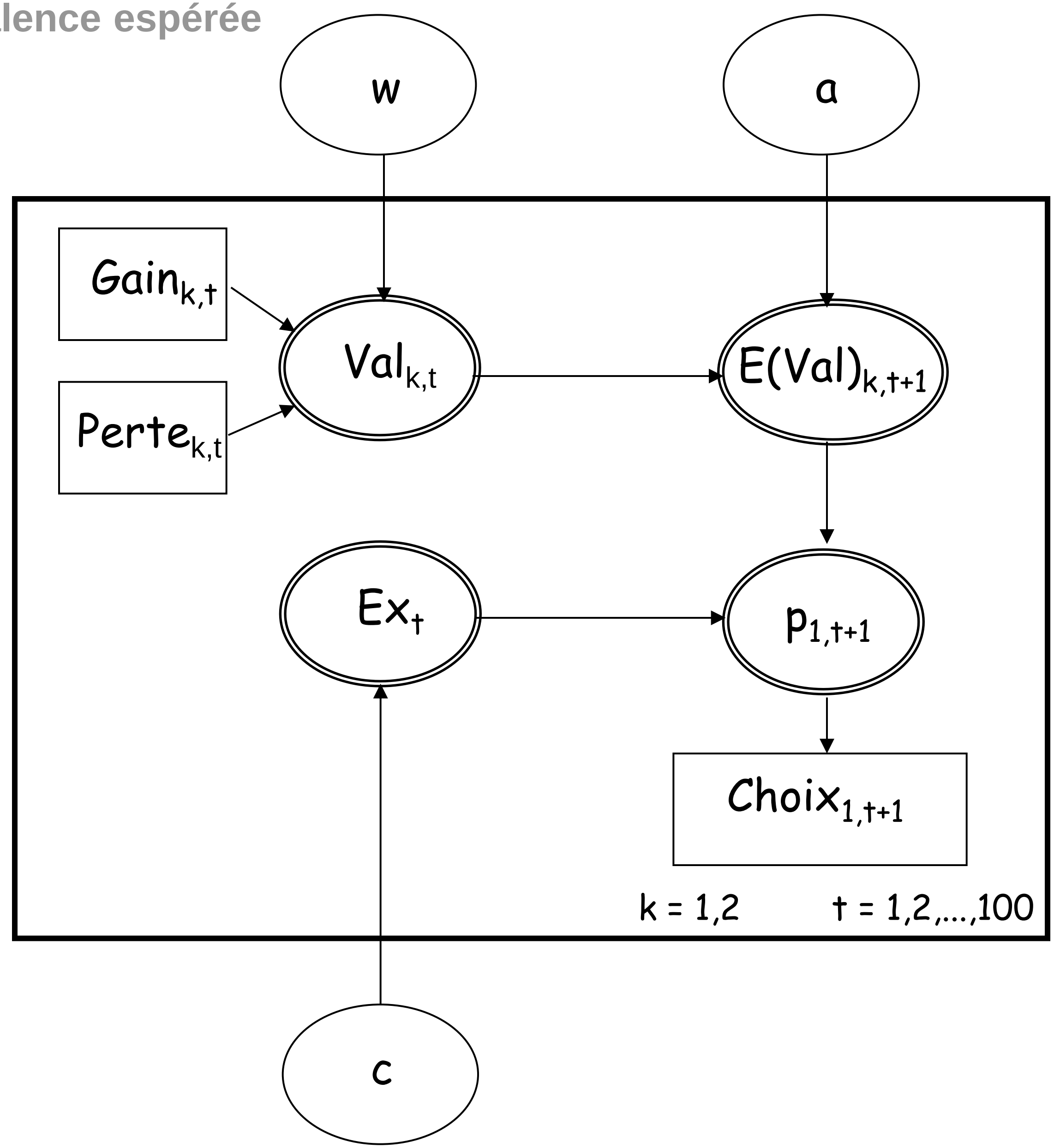
3. Simuler une valeur m dans dunif(0,1).

R est d'autant plus faible que z est une valeur peu probable pour la distribution f(x).

4. Si m > R : rejet de z, z est une valeur peu probable pour la distribution f(x).
   Si m < R : acceptation de z, z est une valeur probable pour la distribution f(x).

Simuler une distribution « complexe » à plusieurs paramètres : MCMC

Modèle de la valence espérée



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Distribution a posteriori :

$$f(a,w,c \mid choix) \propto f(choix \mid a,w,c) * f(a,w,c)$$

En postulant l'indépendance des distributions a priori :

$$f(a,w,c \mid choix) \propto \underbrace{f(choix \mid a,w,c)} * f(a) * f(w) * f(c)$$

$Choix_{k,t+1} \sim dbern\,(p_{1,t+1})$

$\Longleftrightarrow \quad Choix_{k,t+1} \sim dbern\,\left(\dfrac{e^{E(Val)_{1,t}/Expl_t}}{e^{E(Val)_{1,t}/Expl_t} + e^{E(Val)_{2,t}/Expl_t}}\right)$

$\Longleftrightarrow$ etc...

Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Choix de distributions a priori non-informatives:

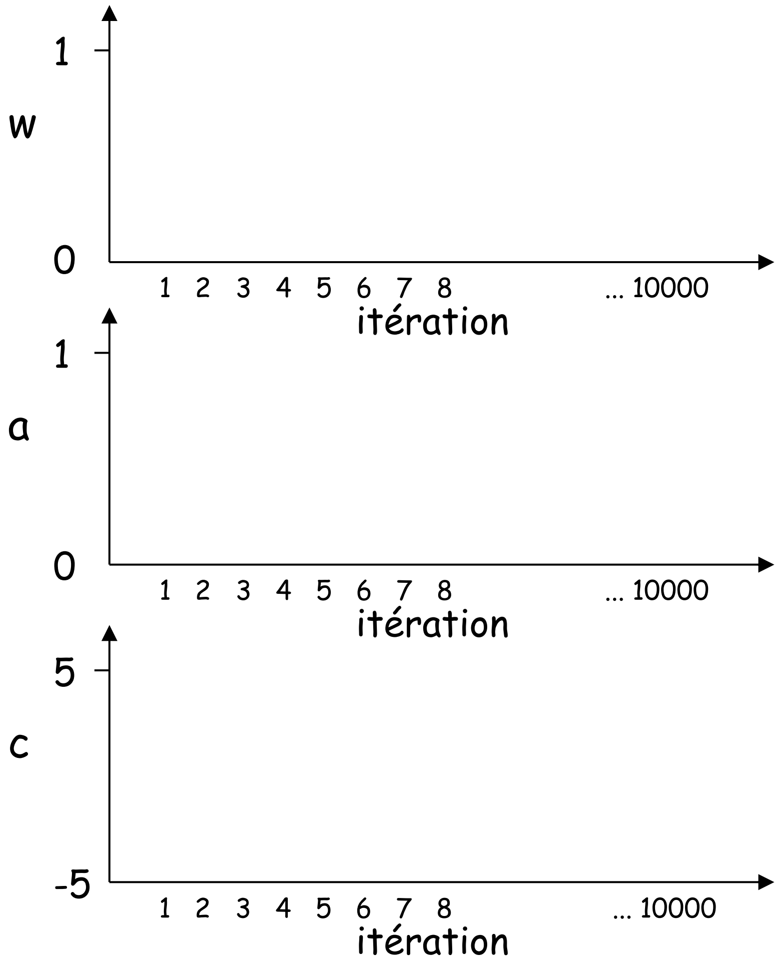
a ~ dbeta (1,1)	$\Longleftrightarrow$	a ~ dunif (0,1)
w ~ dbeta (1,1)		w ~ dunif (0,1)
(c+5)/10 ~ dbeta (1,1)		(c+5)/10 ~ dunif (0,1)

$$f(\theta \mid \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} * \theta^{\alpha-1} * (1-\theta)^{\beta-1}$$

Intégrer la distribution a posteriori par simulation MCMC...

Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

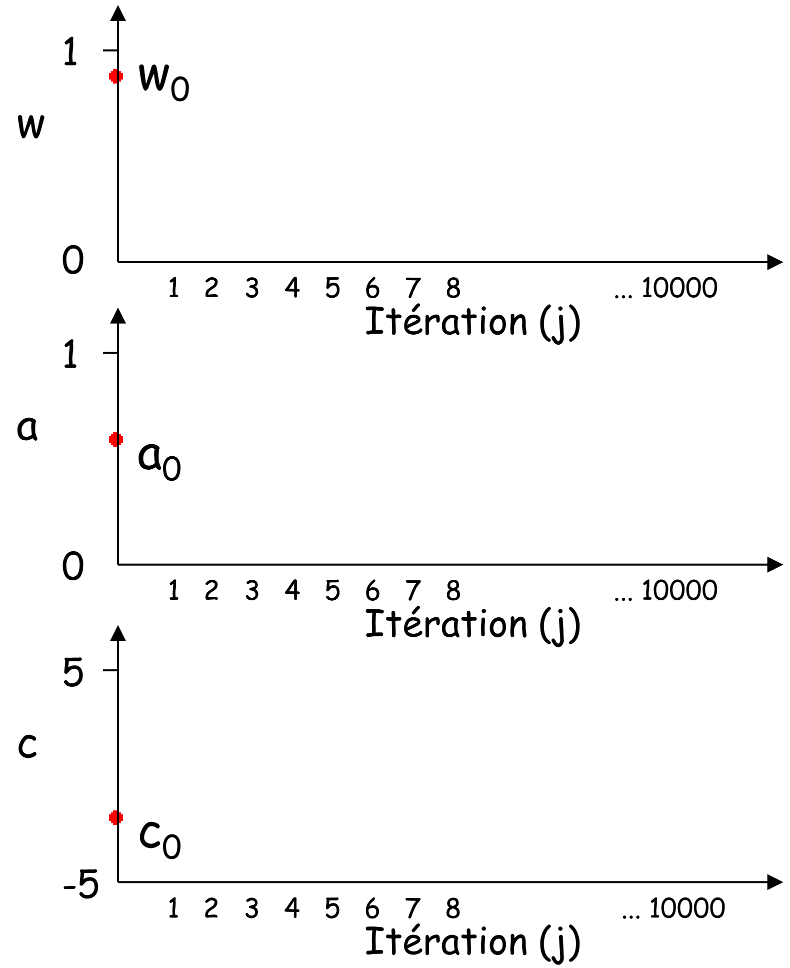
Les étapes de la chaîne de Markov :



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

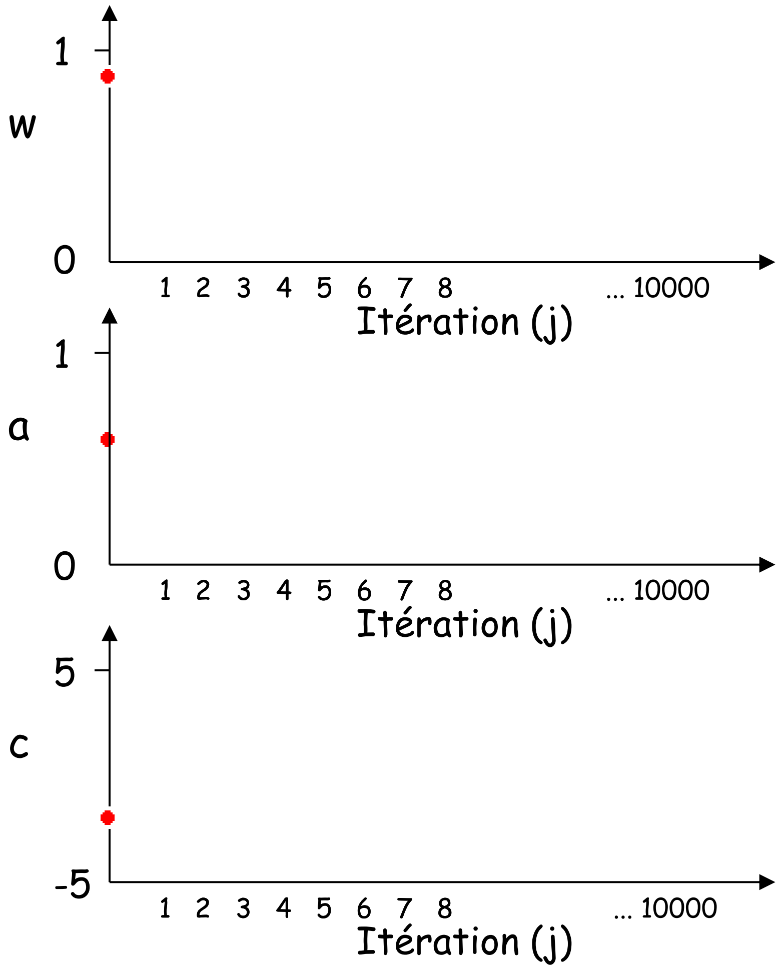
0. j = 0. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

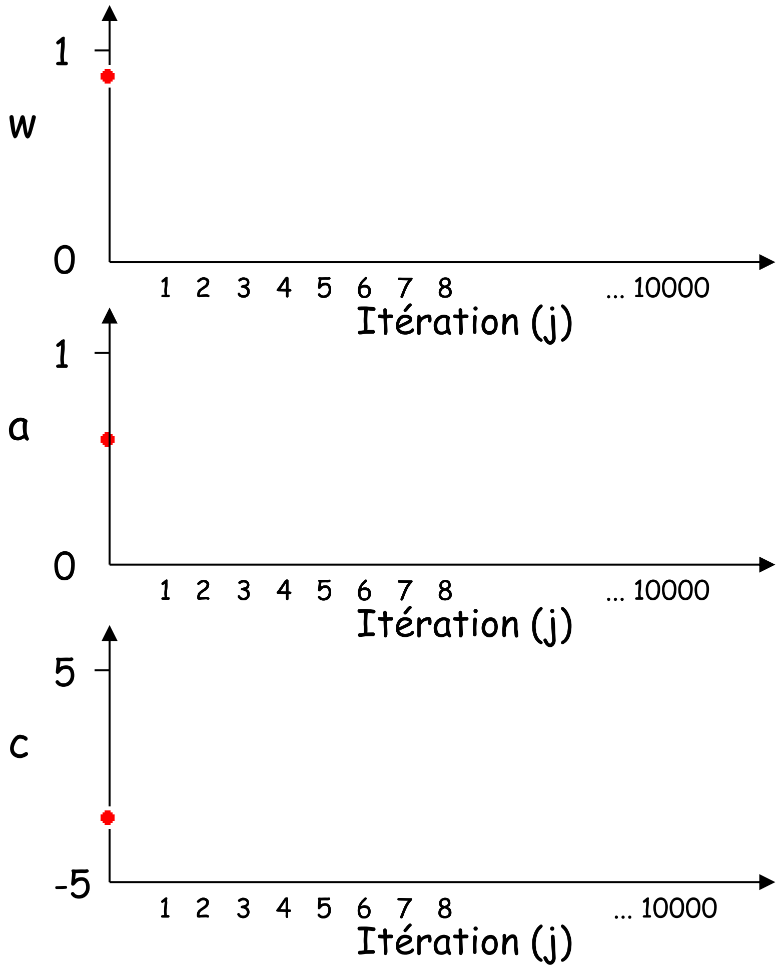
0. j = 0. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. j = j+1



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

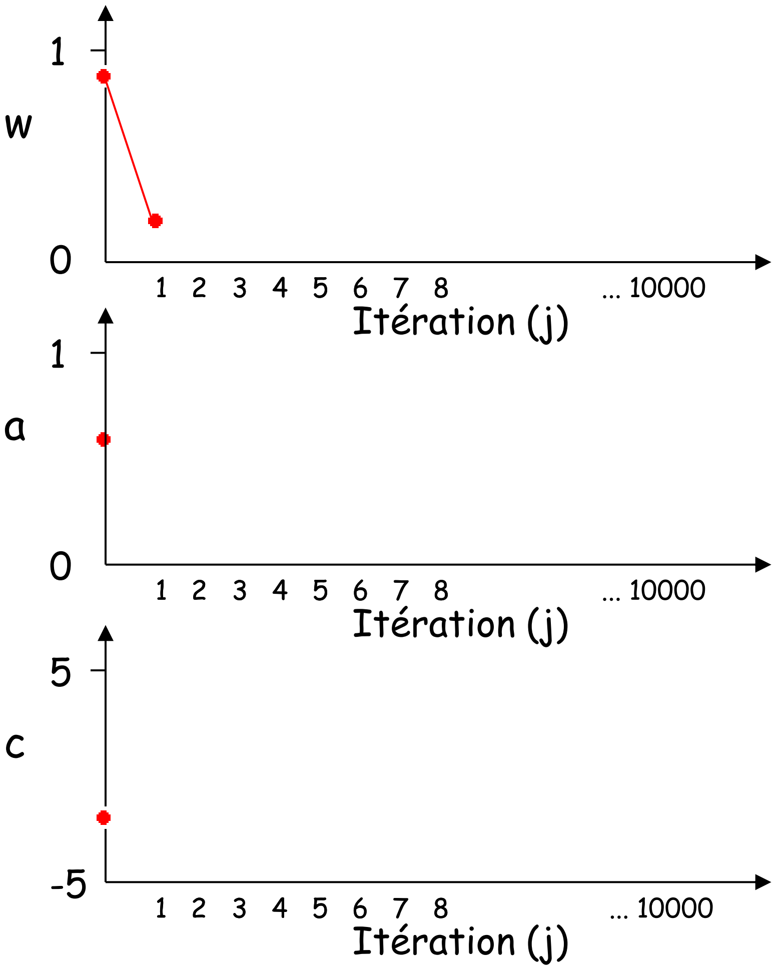
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j | a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

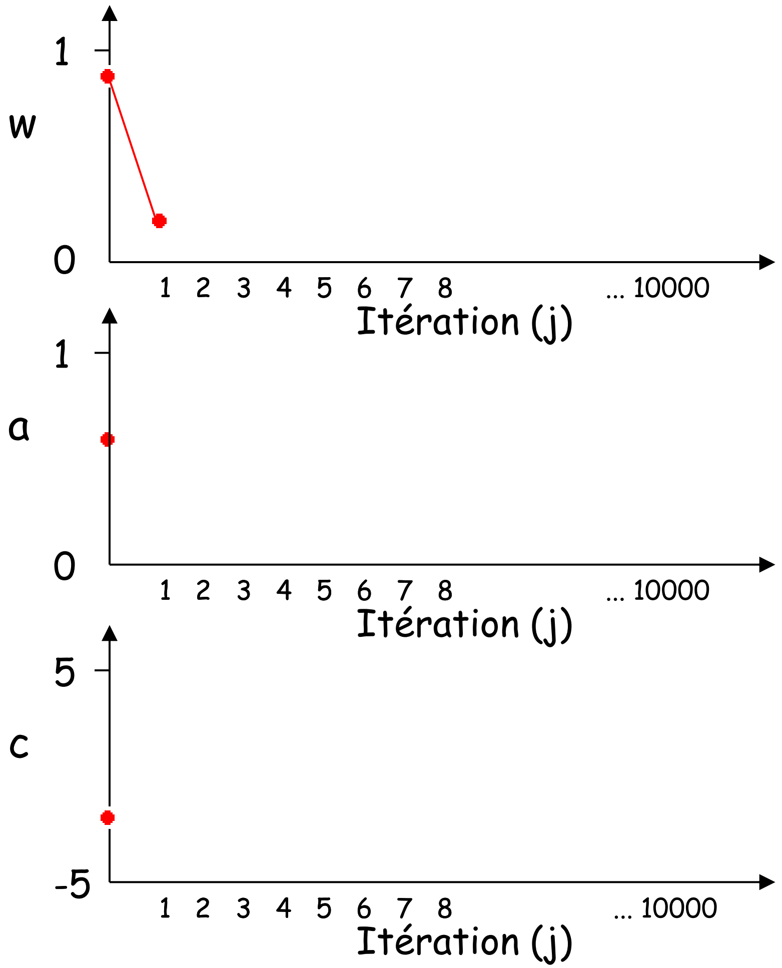
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j | a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

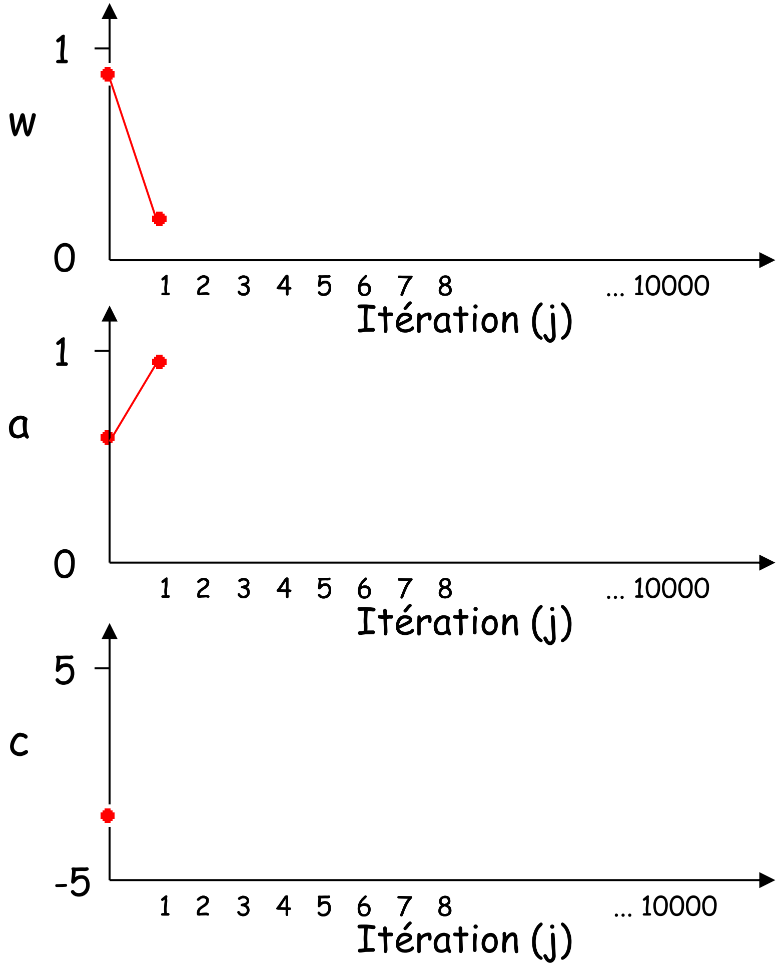
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j :
   $f(w_j | a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j :
   $f(a_j | w_j, c_{j-1}, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

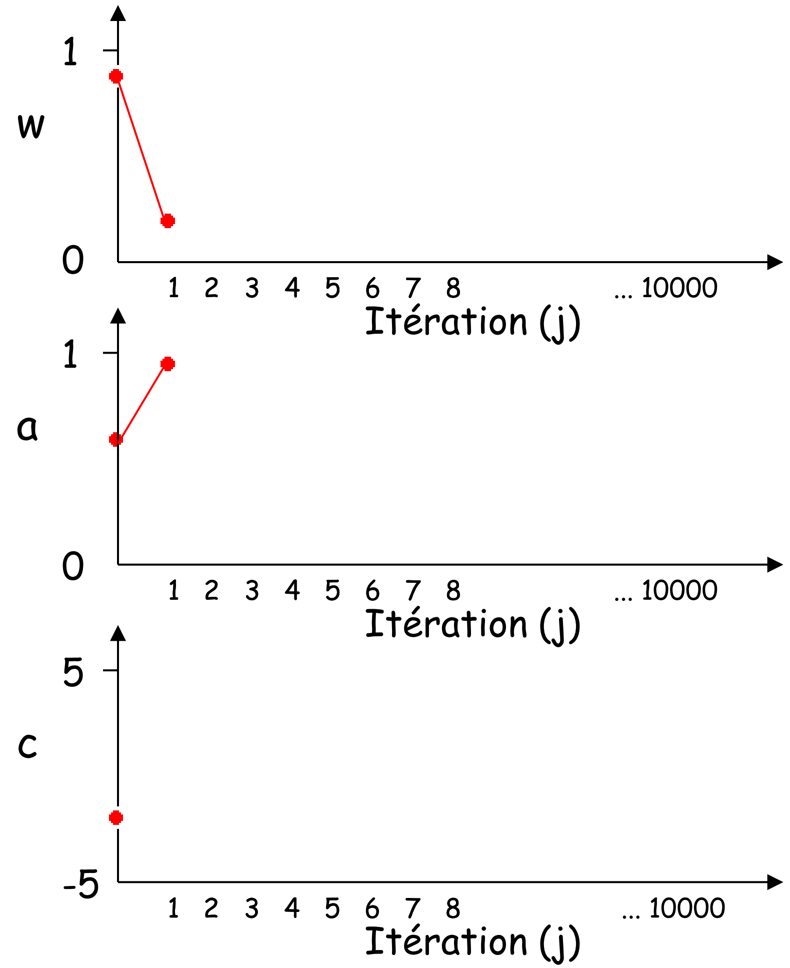
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j | a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j : $f(a_j | w_j, c_{j-1}, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

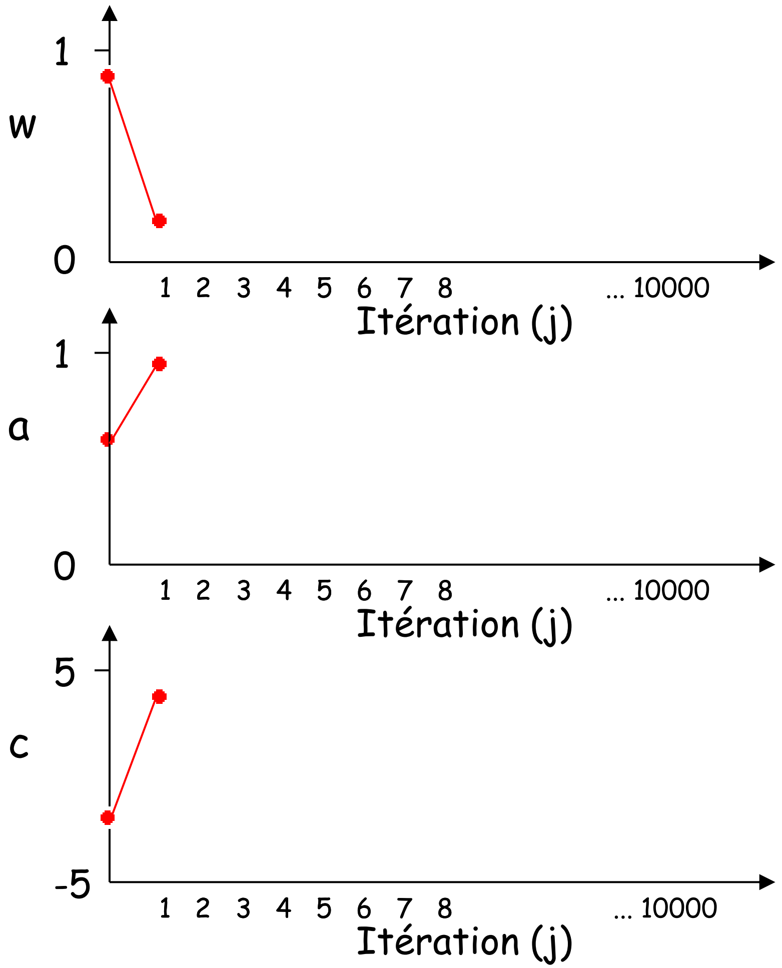
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j|a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j : $f(a_j|w_j, c_{j-1}, \text{choix})$
4. Simulation du paramètre c_j : $f(c_j|w_j, a_j, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

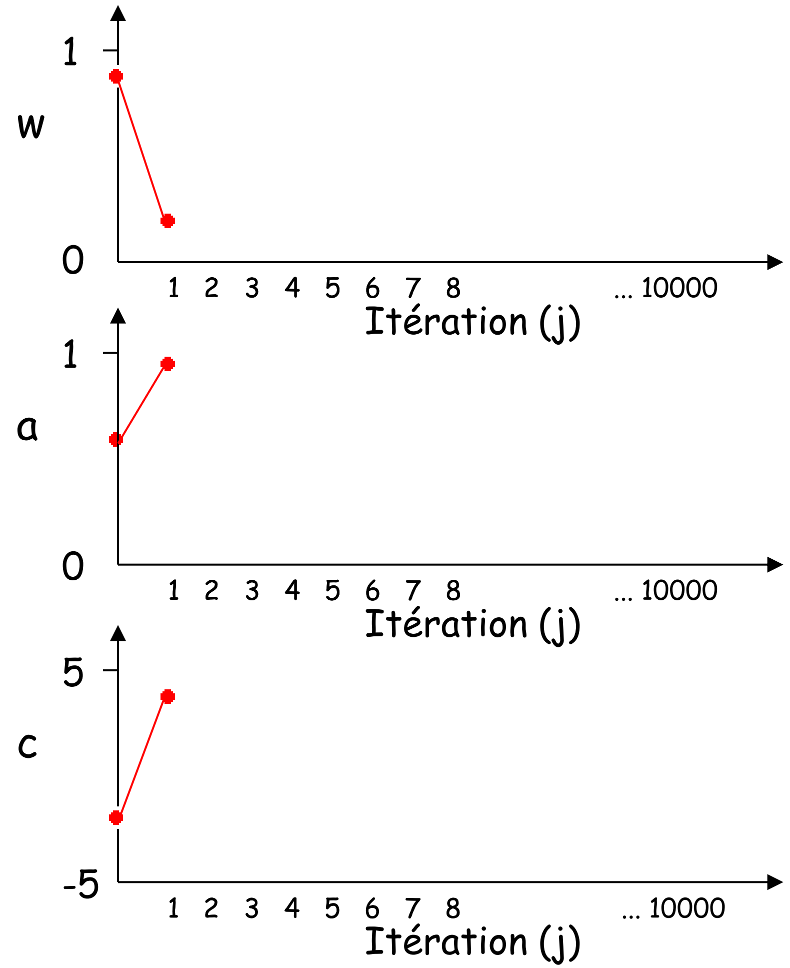
0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j | a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j : $f(a_j | w_j, c_{j-1}, \text{choix})$
4. Simulation du paramètre c_j : $f(c_j | w_j, a_j, \text{choix})$



Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Les étapes de la chaîne de Markov :

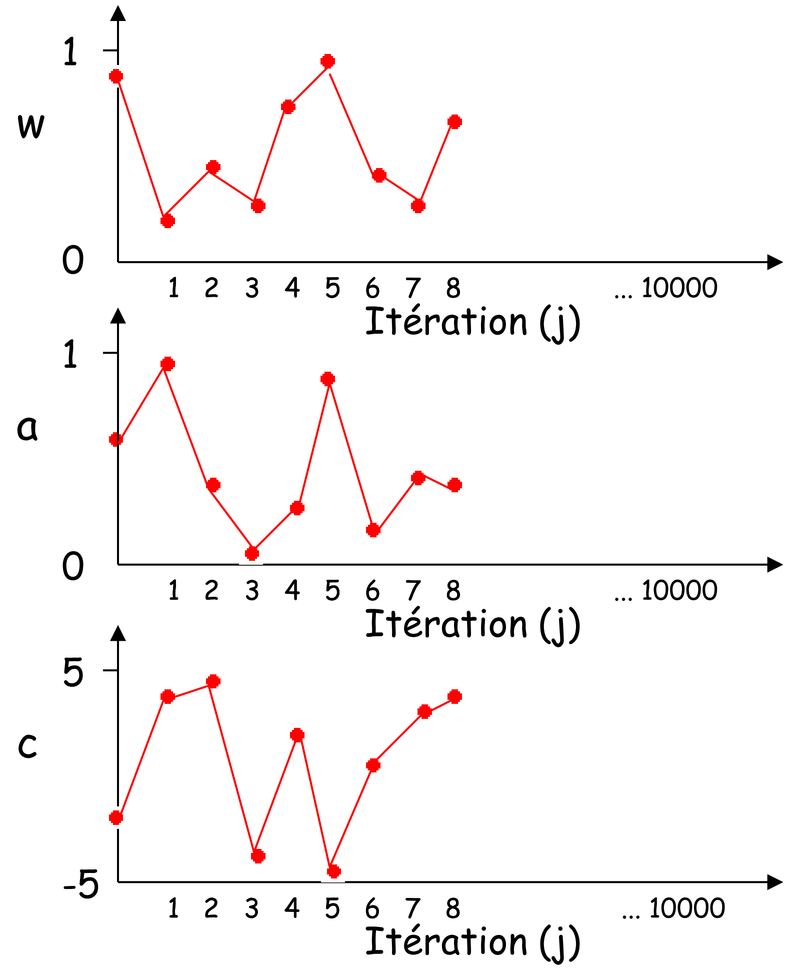
0. j = 0. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. j = j+1
2. Simulation du paramètre w_j :
   $f(w_j|a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j :
   $f(a_j|w_j, c_{j-1}, \text{choix})$
4. Simulation du paramètre c_j :
   $f(c_j|w_j, a_j, \text{choix})$
5. Retour à l'étape 1 (sauf si j=nombre maximal d'itérations).



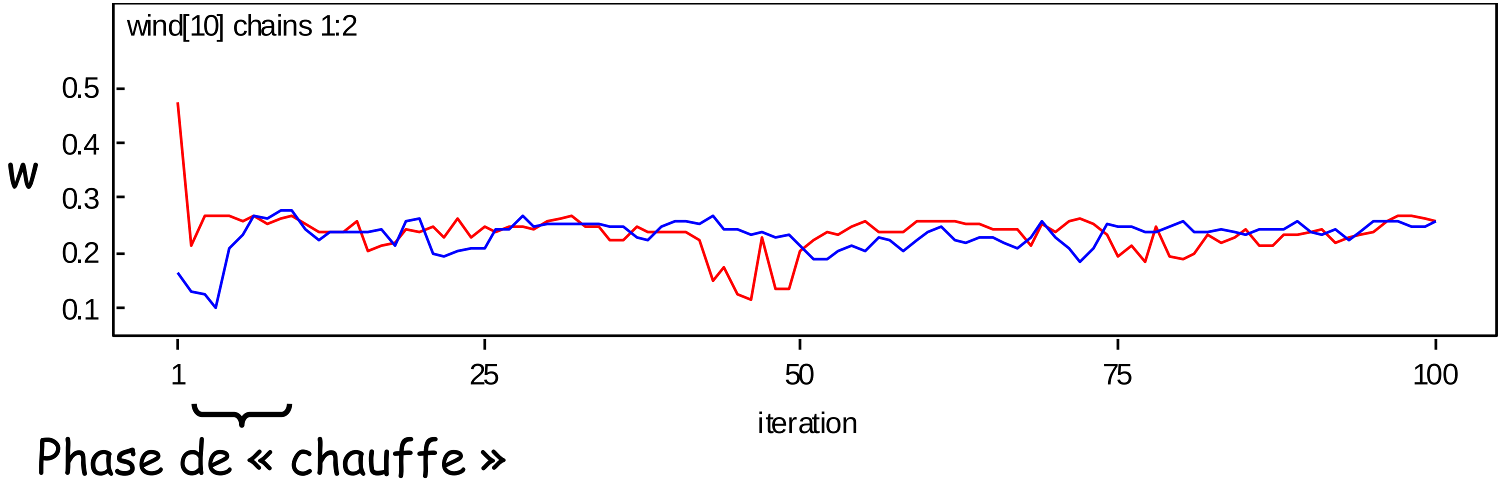
Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

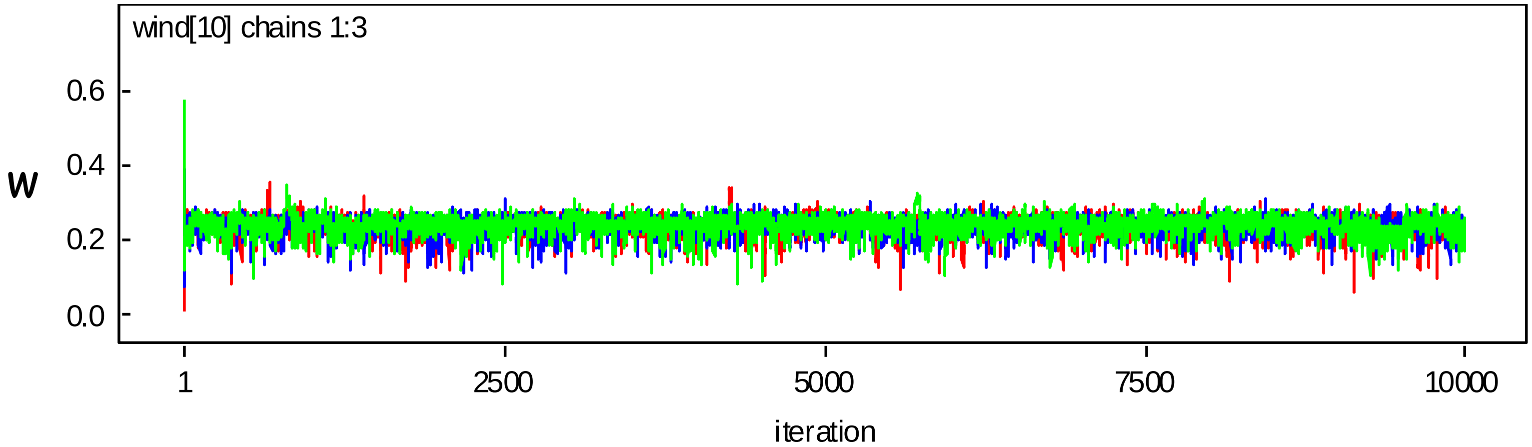
Les étapes de la chaîne de Markov :

0. $j = 0$. A chaque paramètre est associée une valeur initiale : w_0, a_0, c_0.
1. $j = j+1$
2. Simulation du paramètre w_j : $f(w_j|a_{j-1}, c_{j-1}, \text{choix})$
3. Simulation du paramètre a_j : $f(a_j|w_j, c_{j-1}, \text{choix})$
4. Simulation du paramètre c_j : $f(c_j|w_j, a_j, \text{choix})$
5. Retour à l'étape 1 (sauf si j=nombre maximal d'itérations).

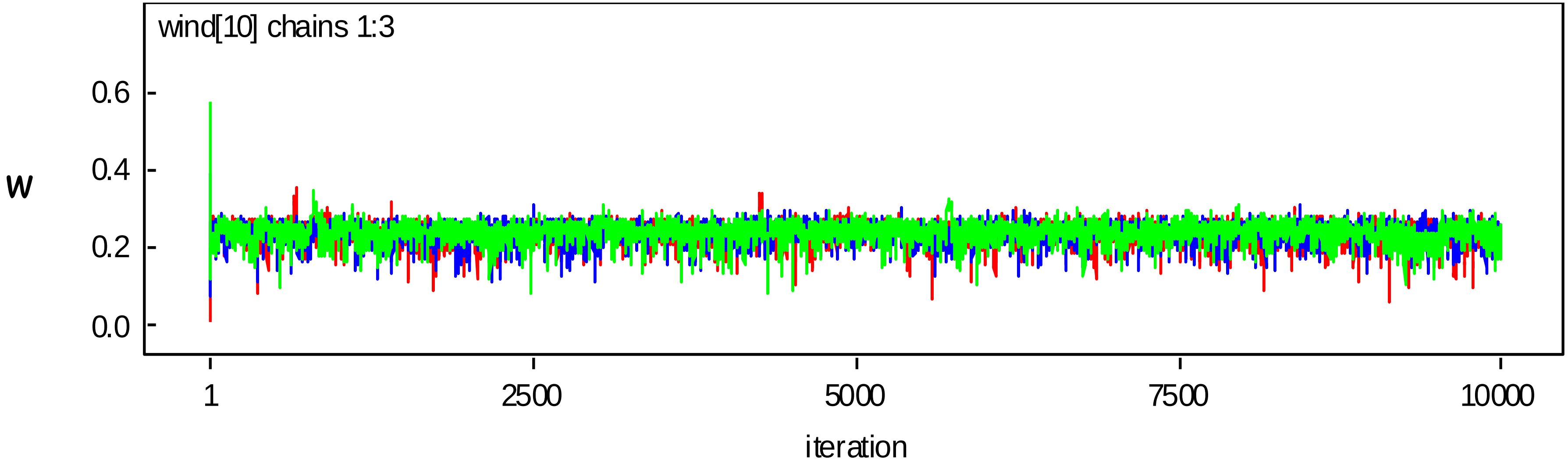


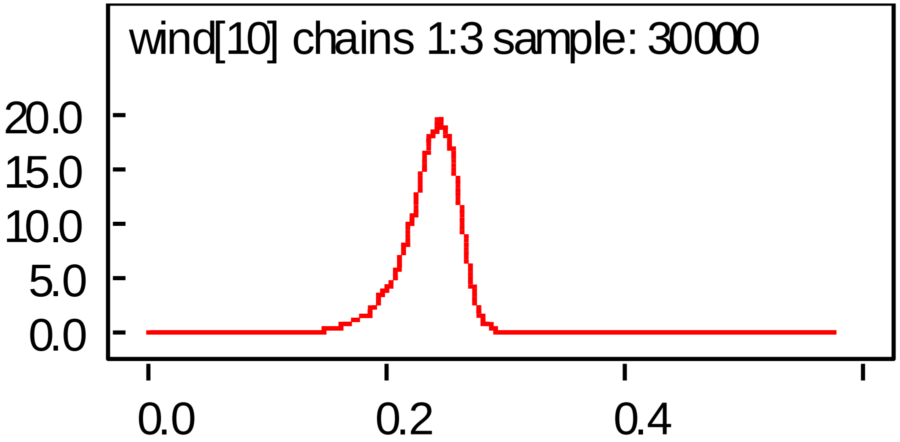
Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC





Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC



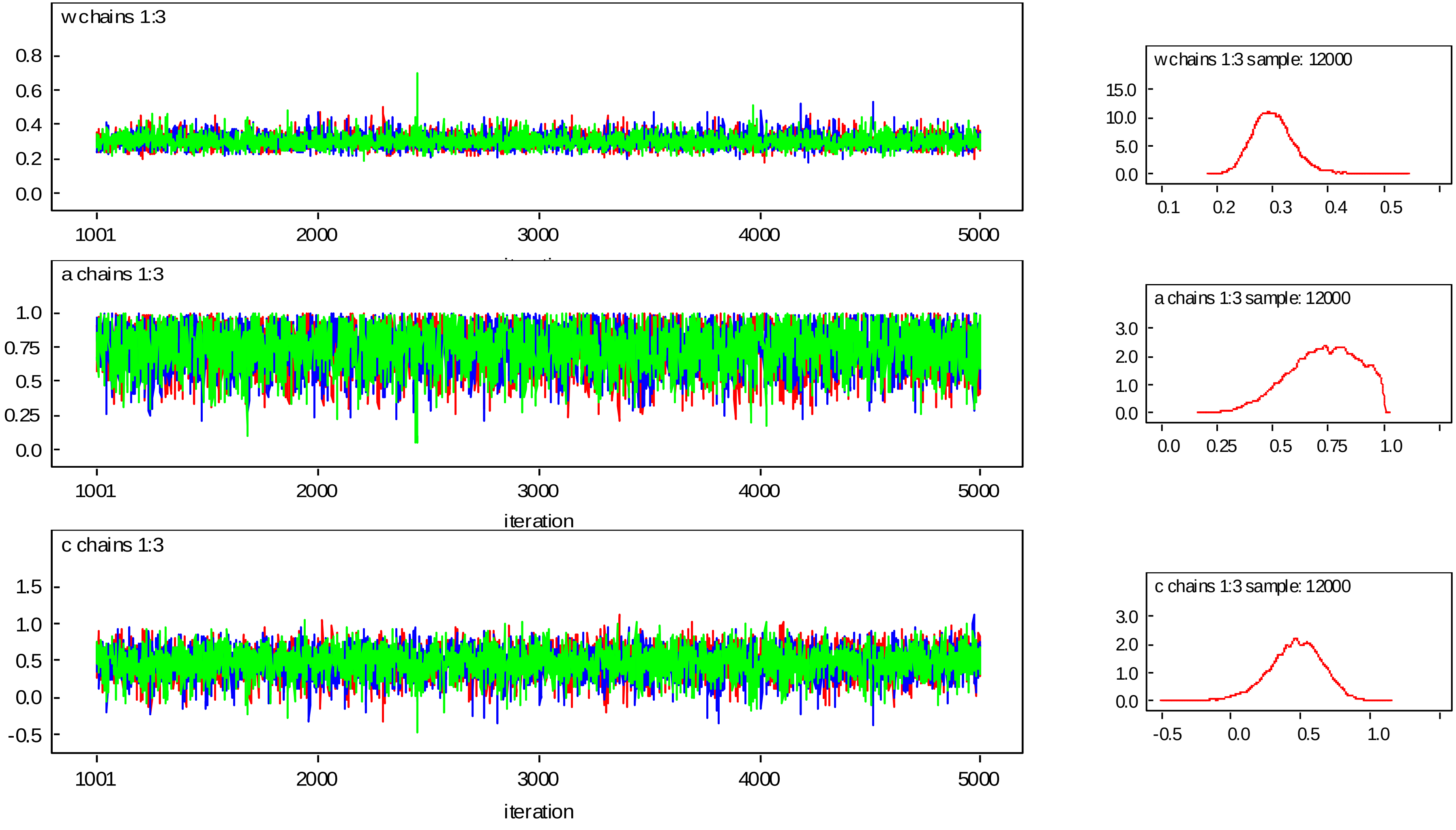


Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Évaluer la convergence de l'algorithme vers la distribution a posteriori :

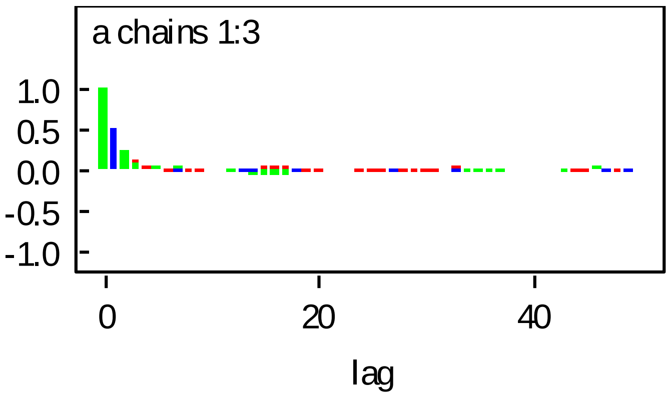
- inspection visuelle
- R-hat de Gelman Rubin
- autocorrélations
- ...

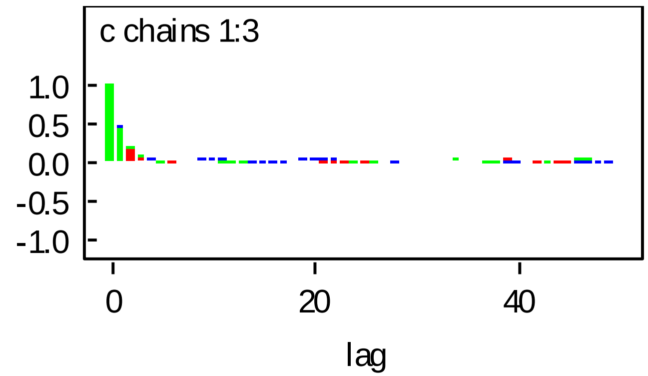
Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

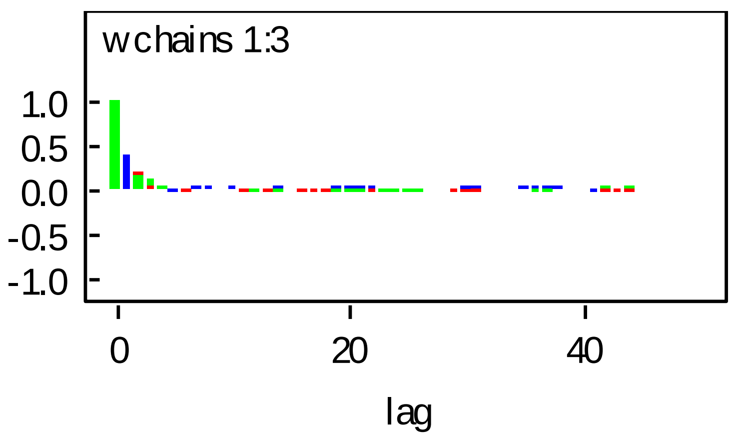


Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Autocorrélations :

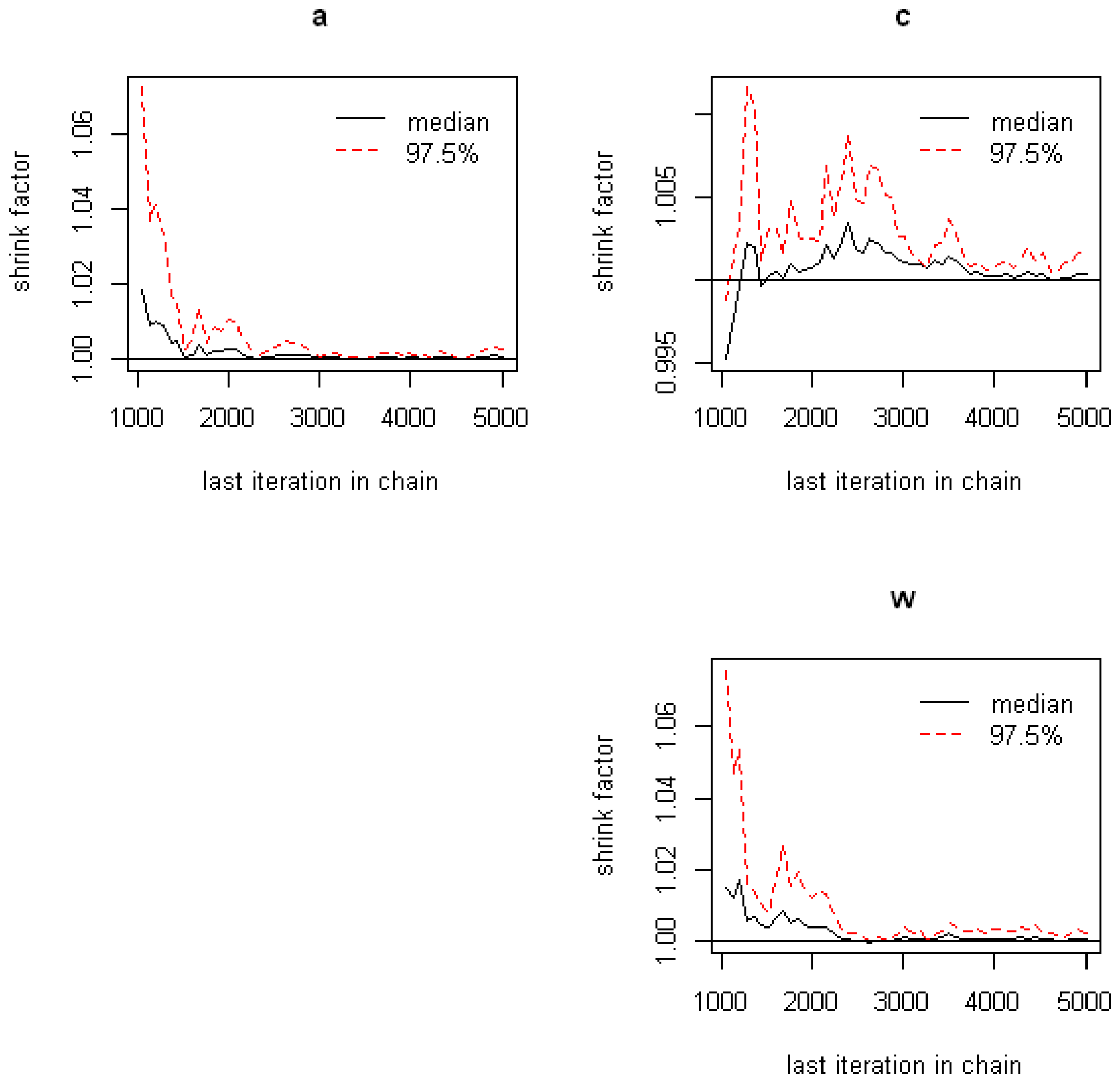




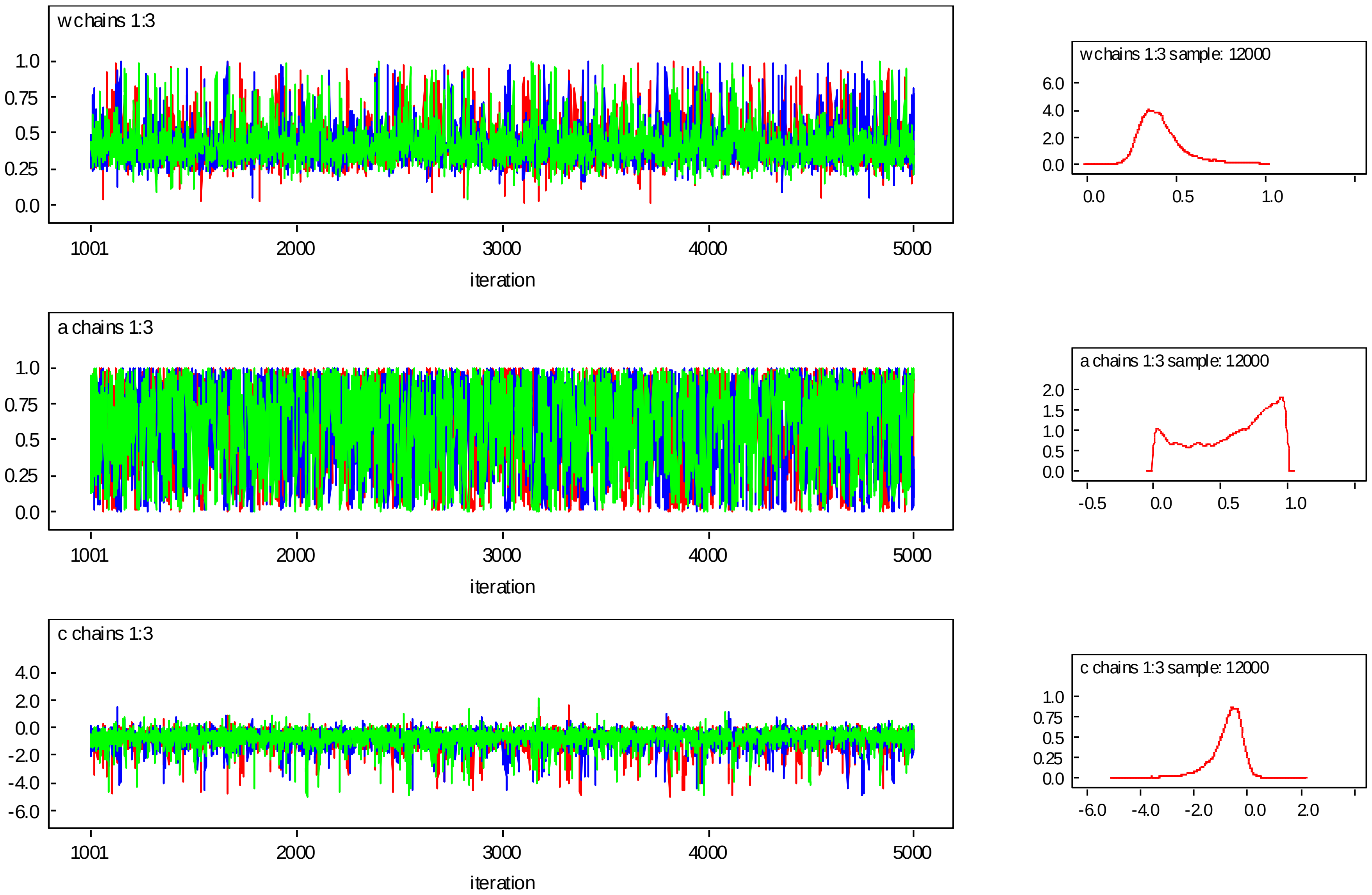


Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

R-hat :

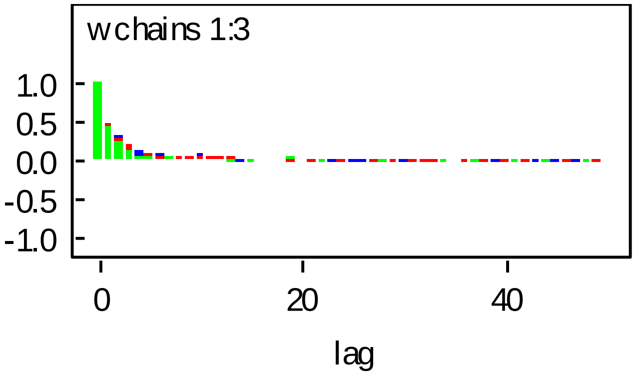


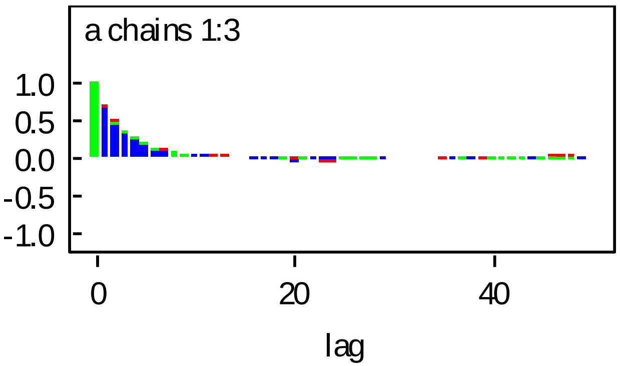
Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

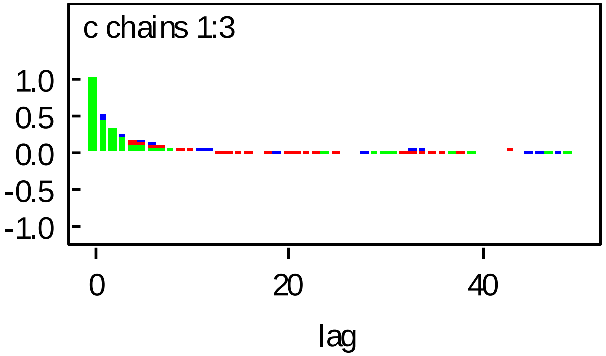


Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Autocorrélations :







Estimation bayésienne du modèle de la valence espérée grâce à la méthode MCMC

Causes possibles de non-convergence :

- Des valeurs initiales trop extrêmes
- Trop peu d'itérations
- Distribution a posteriori multimodale
- Plus fondamentalement : modèle mal ajusté au fonctionnement de l'individu considéré

Perspectives

- Ajustement du modèle
- Comparaison de modèles
- Des modèles différents pour des individus différents
- De l'individu vers le groupe : une agrégation informée des individus

Merci de votre attention !

<u>Lecture :</u>

Lynch, S. M. (2007). Introduction to applied bayesian statistics and estimation for social scientists. New York: Springer. (PDF en ligne)

<u>Outil :</u>

WINBugs (logiciel gratuit, peut éventuellement être piloté via R)