Analyse du changement brutal par le modèle beta généralisé

Yvonnick Noël

Université de Rennes 2, Laboratoire de Psychologie Expérimentale

MODEVAIIA, Saint Mandrier, le 1er Juillet 2009

Sommaire

Stades de l'arrêt du tabac

5 grands stades de changement (DiClemente et Prochaska, 1985 ; DiClemente et Hugues, 1990 ; DiClemente et coll., 1991) décrivent le parcours d'arrêt du tabac :

1. stade de la **non-motivation** : n'envisagent pas d'arrêter de fumer.
2. stade de l'**espérance** (« contemplation ») : a) envisagent sérieusement d'arrêter de fumer dans les six prochains mois, b) n'ont jamais fait encore de tentative.
3. stade de la **préparation** : a) envisagent sérieusement d'arrêter dans les trente jours qui viennent, b) au moins une tentative dans les douze derniers mois.
4. stade d'**action** : ne fument plus et ont arrêté depuis moins de six mois.
5. stade de **maintien** : ont arrêté de fumer depuis plus de six mois.

Dynamique de transitions

Fréquences de transition d'un stade à l'autre par intervalle de 6 mois, estimées sur 308 sujets (Carbonari et coll., 1999).

T/T+6 mois	NM	E	P	A	M
Non motivation	**.611**	.273	.052	.064	.000
Espérance	.140	**.609**	.161	.084	.006
Préparation	.054	**.277**	**.535**	.115	.019
Action	.025	.076	.182	**.252**	**.465**
Maintien	.017	.003	.055	.069	**.856**

Processus de changement

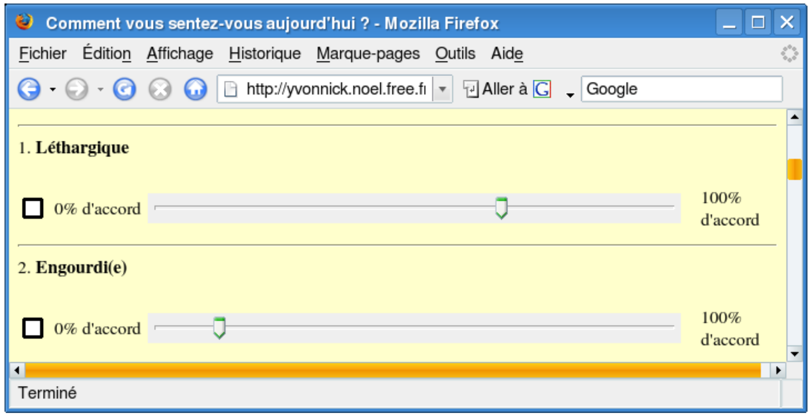
Prochaska & DiClemente distingue des processus **cognitifs** et **comportementaux** du changement. Exemple d'items (Noël, Etter & Perneger, 1999) :

Comportemental	2	Plutôt que de prendre une cigarette, j'essaie de me détendre.
Cognitif	8	Je réfléchis aux avantages d'arrêter de fumer.
Comportemental	15	J'évite d'acheter des cigarettes.
Cognitif	19	J'ai peur de détruire ma santé avec la cigarette.

Hypothèses

- La dynamique de changement est modélisable par une **dimension latente unique**, interprétable comme un parcours de **maturation du changement**
- Le long de ce parcours, les processus de changement sont mobilisés préférentiellement à des moments différents : d'abord les processus **cognitifs**, puis les processus **comportementaux**.
- Question : quelle est la forme de la **fonction d'évolution** des processus ? Continue ou discontinue ? Monotone croissante ? En 'U' inversé ?

Le format de réponse continu



Modèle de distribution approprié

- Les données ainsi obtenues sont **continues bornées** à gauche et à droite.
- **Il n'est pas légitime** de poser une hypothèse de loi normale (continue non bornée) sur de telles données.
- Nous cherchons un modèle de distribution :
  - qui soit définie sur un **intervalle borné**
  - qui résulte d'une **hypothèse psychologique** sur le mécanisme de réponse.

Le mécanisme d'interpolation

- Les échelles visuelles analogiques ne donnent pas d'autres points de référence que les **labels d'extrémités**.
- Nous allons considérer que le mécanisme de réponse consiste en une **attribution de valeurs**, v_0 et v_1, à chacune des réponse extrêmes, de coordonnées graphiques $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = 1$.
- Nous supposons (Noël & Dauvier, 2007[1]) que le sujet **interpole** sa réponse X selon :

$$X = \frac{\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1}{v_0 + v_1} = \frac{v_1}{v_0 + v_1}$$

[1] Noël, Y., & Dauvier, B. (2007). A beta item response model for continuous bounded responses, *Applied Psychological Measurement*, 31(1), 47-73.

Exemple

- **Exemple** : si le sujet accorde (sur une échelle subjective inconnue) la valeur 2 à la réponse « 0% d'accord » et la valeur 8 à la réponse « 100% d'accord », il mettra une croix en position 80% de la longueur du segment à droite :

$$X = \frac{8}{2+8} = 0.8$$

- **Remarque** : cette construction garantit que la réponse est **bornée** sur $[0;1]$.
- Ce mécanisme hypothétique de réponse très semblable aux modèles classiques du **choix** en psychologie (Luce, 1959), ou en économétrie (McFadden, 1974) ou à la **loi du matching** en théorie de l'apprentissage skinnérien (Herrnstein, 1961).

Modèle aléatoire

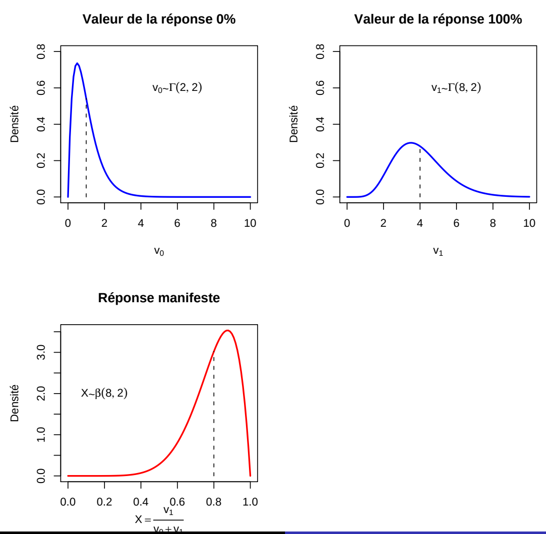
- Les « valeurs psychologiques » accordées par le sujet sont considérées comme des **quantités non-négatives**.
- Il n'est pas plausible de penser que le sujet donnerait la même évaluation sur les réponses 0% et 100% à tout moment.
- Nous considérons qu'il les échantillonne dans deux **lois Gamma** de formes distinctes, mais sur une échelle commune :

$$\begin{aligned} v_0 &\sim \Gamma(n, s) \\ v_1 &\sim \Gamma(m, s) \end{aligned}$$

- Nous savons alors que (Kotz & Johnson, 1982, p.229) :

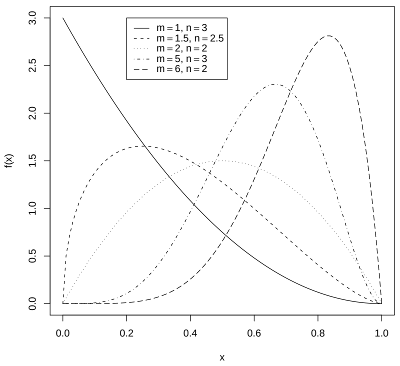
$$X = \frac{v_1}{v_0 + v_1} \sim \beta(m, n)$$

Relation des lois Gamma et beta



La loi de densité beta

$$f(x; m, n) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \text{ pour } x \in [0;1], \;\; m, n > 0$$



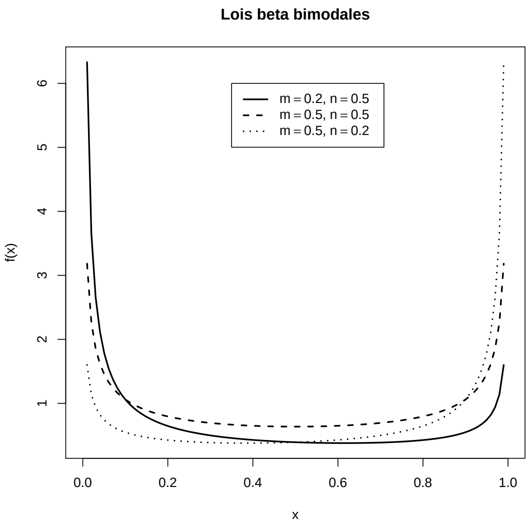
Distribution de réponse bimodale

- Comme m et n sont des exposants sur les facteurs x and $(1-x)$, ils sont interprétables comme des paramètres d'**acceptation** et de **refus**, respectivement.
- La loi beta $\beta(m, n)$:

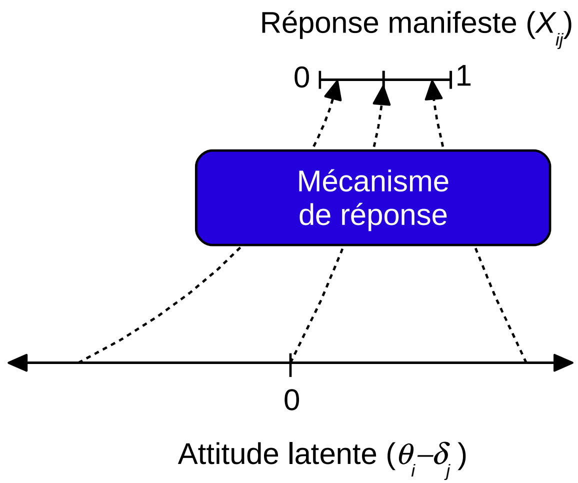
$$f(x; m, n) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \text{ pour } x \in [0;1], \;\; m, n > 0$$

a pour propriété de prendre une **forme bimodale** dès que $m < 1$ et $n < 1$ simultanément.

Distribution de réponse bimodale



Notion d'attitude latente



Un modèle structural

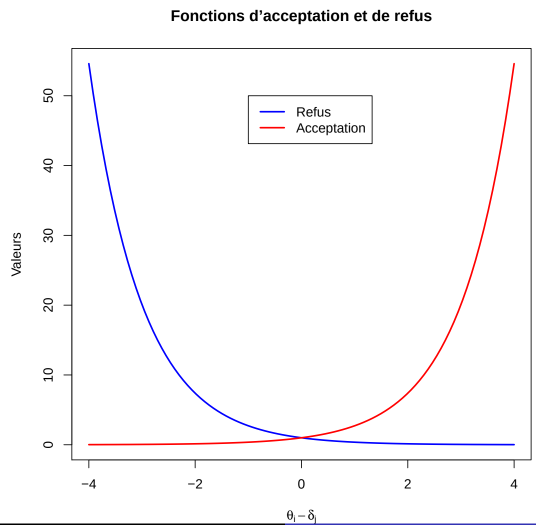
- Pour connecter le modèle distributionnel avec des **quantités psychologiquement interprétables**, les paramètres de distribution sont réexprimés comme :

$$m_{ij} = \exp\left(\frac{\theta_i - \delta_j}{2}\right)$$
$$n_{ij} = \exp\left(-\frac{\theta_i - \delta_j}{2}\right)$$

  où θ_i et δ_j sont des paramètres **sujet-spécifique** et **item-spécifique** respectivement (une « maturité » et une « position caractéristique » par exemple).

- Le paramètre d'acceptation est ainsi une fonction croissante de la maturité du sujet, et le refus une fonction décroissante de cette maturité.

Fonctions d'acceptation et de refus



Fonction de réponse

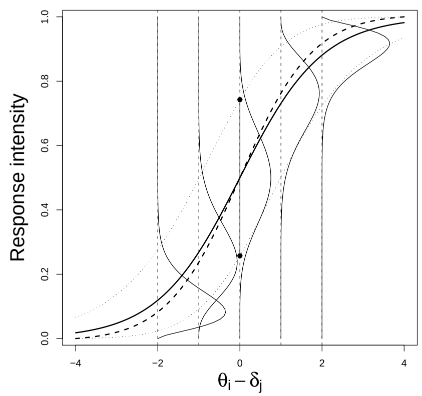
- Dans un modèle $\beta(m_{ij}, n_{ij})$ l'**espérance** s'écrit :

$$\mu_{ij} = E(X_{ij}; m_{ij}, n_{ij}) = \frac{m_{ij}}{m_{ij} + n_{ij}}$$

- La **fonction de réponse espérée** est donc :

$$E(X_{ij}; \theta_i, \delta_j) = \frac{\exp\left(\frac{\theta_i - \delta_j}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\theta_i - \delta_j}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\theta_i - \delta_j}{2}\right)} = \frac{\exp(\theta_i - \delta_j)}{1 + \exp(\theta_i - \delta_j)}$$

Représentation graphique



Noel, Y., & Dauvier, B. (2007). A beta response model for continuous bounded responses, *Applied Psychological Measurement*, 31, 47-73.

Distribution de réponse unimodale

- La bimodalité **ne peut arriver** dans le modèle de réponse beta cumulatif car :

$$m_{ij} = \exp(\theta_i - \delta_j) = \frac{1}{\exp(\delta_j - \theta_i)} = \frac{1}{n_{ij}}$$

- On voit que m_{ij} et n_{ij} ne peuvent jamais etre simultanément inférieurs à 1 et cela contraint la distribution de réponse à l'**unimodalité**.

Modèle beta généralisé

- On peut **relaxer cette contrainte** en définissant les fonctions d'acceptation et de refus comme :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \exp\left[\alpha_{1j}\left(\theta_i - \delta_{1j}\right)\right] \\ n_{ij} &= \exp\left[\alpha_{2j}\left(\theta_i - \delta_{2j}\right)\right] \end{aligned}$$

avec comme contraintes $\alpha_{1j} > 0$ et $\alpha_{2j} < 0$.

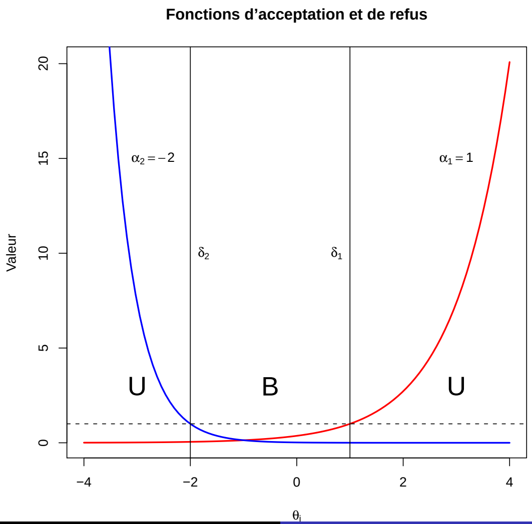
Emergence de la bimodalité

- Dans cette nouvelle version, m_{ij} et n_{ij} peuvent très bien être **inférieurs à 1 tous les deux :**

$$\begin{aligned} m_{ij} < 1 &\Longleftrightarrow \theta_i < \delta_{1j} \\ n_{ij} < 1 &\Longleftrightarrow \theta_i > \delta_{2j} \end{aligned}$$

- La distribution de réponse sur l'item j sera donc **bimodale** pour $\theta_i \in]\delta_{2j}; \delta_{1j}[$ si $\delta_{2j} < \delta_{1j}$.
- La contrainte $\delta_{1j} \geq \delta_{2j}$ correspond donc à une **contrainte d'unimodalité** (sous condition de signe sur les α).

Fonction d'acceptation et de refus



Fonction de réponse espérée

La **fonction de réponse espérée** reste logistique car :

$$\begin{aligned} E(X_{ij}; m_{ij}, n_{ij}) &= \frac{m_{ij}}{m_{ij}+n_{ij}} \\ &= \frac{\exp\left[\alpha_{1j}\left(\theta_i-\delta_{1j}\right)\right]}{\exp\left[\alpha_{1j}\left(\theta_i-\delta_{1j}\right)\right]+\exp\left[\alpha_{2j}\left(\theta_i-\delta_{2j}\right)\right]} \\ &= \frac{\exp\left[(\alpha_{1j}-\alpha_{2j})\theta_i+(\alpha_{2j}\delta_{2j}-\alpha_{1j}\delta_{1j})\right]}{\exp\left[(\alpha_{1j}-\alpha_{2j})\theta_i+(\alpha_{2j}\delta_{2j}-\alpha_{1j}\delta_{1j})\right]+1} \end{aligned}$$

Paramètre de position d'item

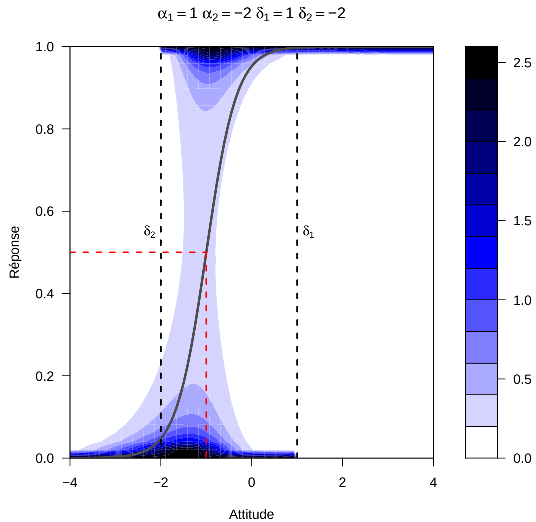
- Il est naturel de définir comme **paramètre de position** δ_j de l'item la valeur de θ_i pour laquelle l'acceptation égale le refus.
- Cela correspond à la valeur de θ_i telle que :

$$E(X_{ij}; \theta_i, \delta_{1j}, \delta_{2j}, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}) = \frac{1}{2}$$

soit :

$$\delta_j = \frac{\alpha_{1j}\delta_{1j}-\alpha_{2j}\delta_{2j}}{\alpha_{1j}-\alpha_{2j}}$$

Densité de réponse



Données

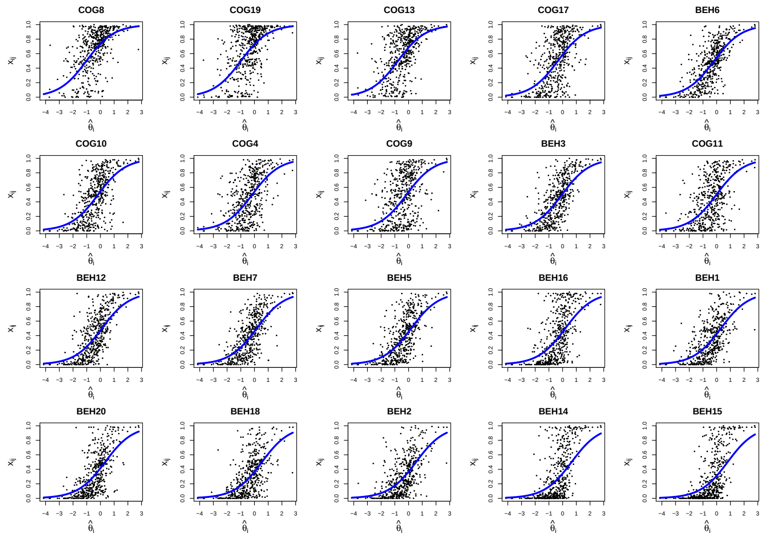
- Un questionnaire de 20 **items de changement** (8 cognitifs et 12 comportementaux) a été soumis à 494 fumeurs, étudiants en Instituts de Formation en Soins Infirmiers (Noël, Molimard & Martin, 1999).
- Le format de réponse est **visuel analogique**.
- On enregistre leur **stade de changement**, au sens de Prochaska.

Analyse beta

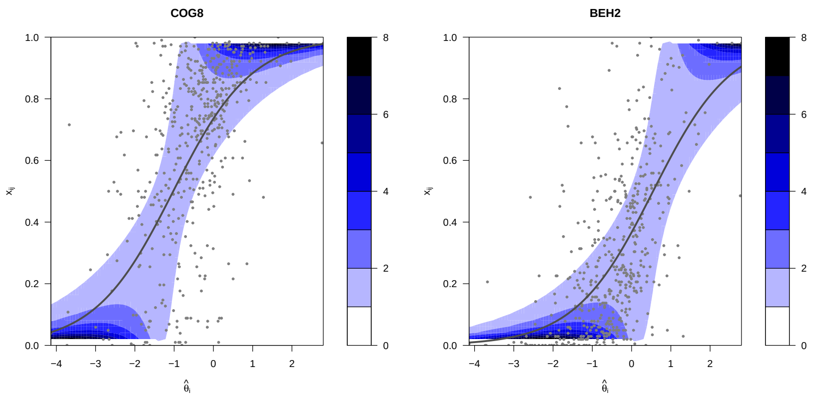
L'analyse consiste par un algorithme numérique approprié à **estimer les paramètres inconnus** du modèle, c'est-à-dire :

- Le paramètre θ_i de **maturité** de chaque sujet i,
- Le paramètre δ_j de **position caractéristique** de l'item j sur le parcours de changement (ou les α_{1j}, α_{2j}, δ_{1j} et δ_{2j} dans le modèle généralisé).

Résultats (modèle simple)

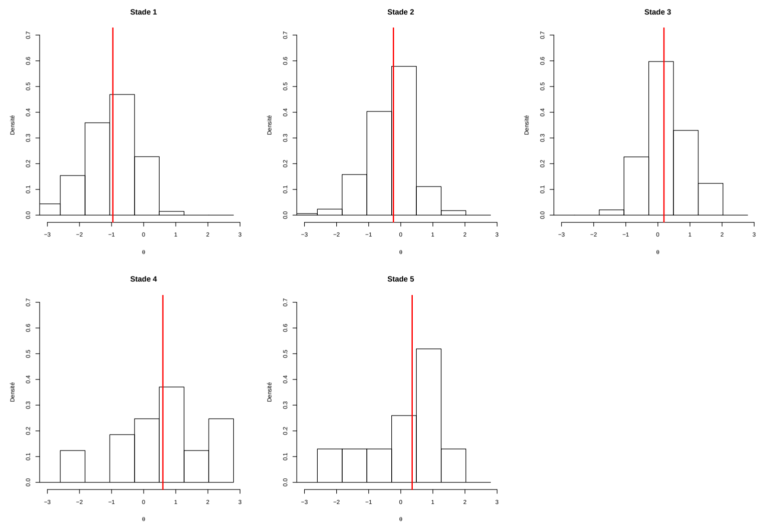


Densités de réponse

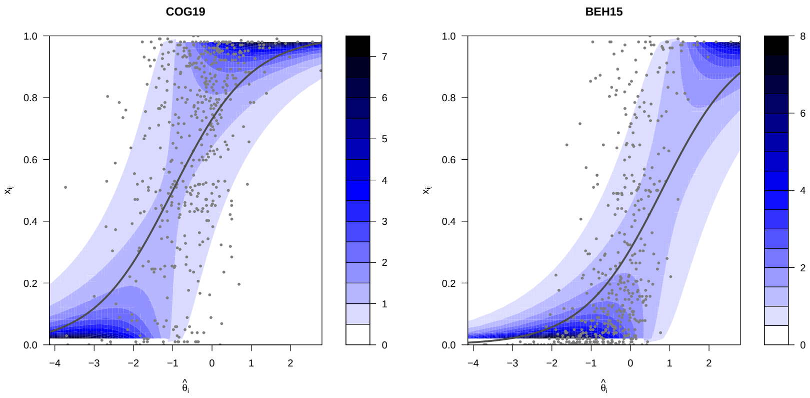


COG8 : « Je réfléchis aux avantages d'arrêter de fumer »
BEH2 : « Plutôt que de prendre une cigarette, j'essaie de me détendre »

Lien aux stades



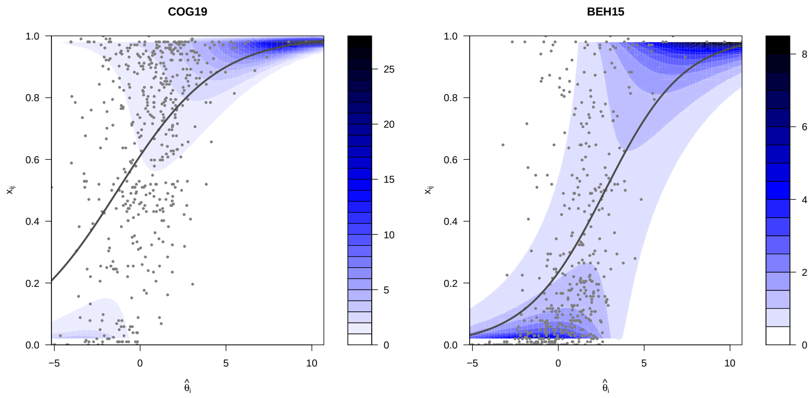
Modèle beta unimodal



$AIC = -8445.984$

Dynamique de l'arrêt du tabac
Modèle de distribution
Modèle structural
Application aux données de changement
Conclusions

Modèle beta bimodal



$AIC = -9696.097$

Yvonnick Noël
Analyse du changement brutal par le modèle beta généralis

Dynamique de l'arrêt du tabac
Modèle de distribution
Modèle structural
Application aux données de changement
Conclusions

Conclusions

- La modélisation par modèle de réponse permet de remplacer le modèle en stades discrets par un modèle du changement **numérique unidimensionnel**.
- Le passage aux données continues a rendu possible l'émergence de formes de **densités bimodales de réponse** (impossible avec des données binaires ou Likert).
- Cela conduit à penser d'une nouvelle manière l'indétermination du sujet : sa réponse peut brusquement **bifurquer** d'un extrême à l'autre.
- Cette modélisation réconcilie la notion d'une évolution **continue** avec une variation potentiellement **discontinue** de la réponse observée.

Yvonnick Noël
Analyse du changement brutal par le modèle beta généralis